Bedeutung hoher Teilchenenergien

Die kleinsten Dimensionen liegen heute in der Physik unter

$$d < 10^{-15}\ \mathrm{m}$$

Die zur Untersuchung benutzten Wellenlängen dürfen ebenfalls nicht größer sein. Das ergibt eine Photonenenergie

$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 2\cdot 10^{-10}\ \mathrm{J}$$

Durch Bremsstrahlung erzeugt müssen die Elektronen die Energie

$$E_e > E_\gamma \qquad \text{mit} \qquad E_e = eU$$

Dann ist die Spannung

$$U = \frac{E_e}{e} = 1.2\cdot 10^9\ \mathrm{V}$$

erforderlich.

Untersuchung der Materie mit Hilfe hochenergetischer Teilchen (z.B. Elektronen)

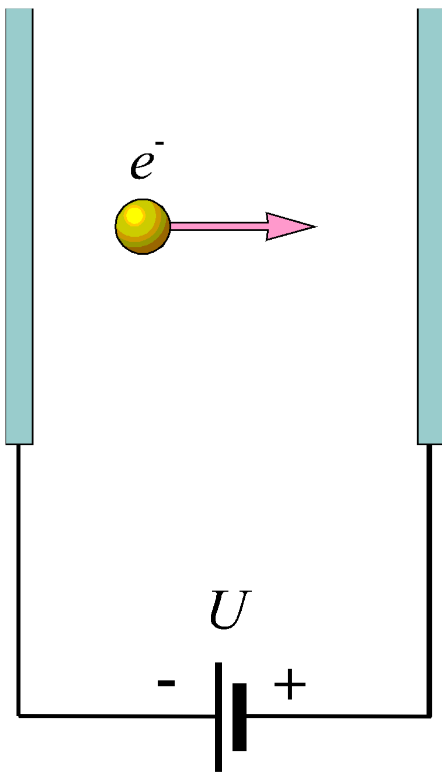
de Broglie-Wellenlänge:

$$\lambda_\mathrm{B} = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E}$$

Ergibt dieselbe Spannung von

$U = 1.2\cdot 10^9$ V

Definition von 1 eV:



Wenn das Elektron mit der Ladung

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

die Spannung

$$U = 1\mathrm{V}$$

durchläuft, hat es die Energie

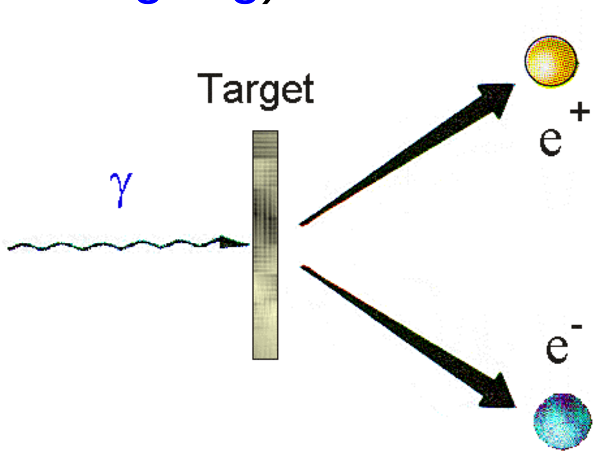
$$E = eU = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

$$\Leftrightarrow \quad E = 1\mathrm{eV}$$

gewonnen. Gebräuchlich sind folgende Werte:

1 keV = 10^3 eV,
1 MeV = 10^6 eV
1 GeV = 10^9 eV
1 TeV = 10^{12} eV

Erzeugung neuer Teilchen (Paarerzeugung):



Um ein Teilchen der Masse m zu erzeugen, braucht man die Energie

$$E = mc^2$$

Wegen Ladungserhaltung müssen immer zwei Teilchen erzeugt werden („Paarerzeugung"). Bei Elektronen-Positronen-Paaren ist daher

$$E_\gamma > 2m_e c^2 = 1.637 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J} = 1.02\,\mathrm{MeV}$$

die Ruhemasse ist

$$m_e = 9.108 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

$$\Leftrightarrow \quad E_0 = 511\ \mathrm{keV}$$

Beispiele:

Proton	p	E_0 = 938 MeV
b-Quark	b	E_0 = 4735 MeV
Vektorboson	Z_0	E_0 = 93000 MeV
t-Quark	t	E_0 = 174000 MeV

Kräfte zur Beschleunigung von Teilchen

Teilchenenergie in relativistisch invarianter Form

$$E = \sqrt{m_o^2 c^4 + p^2 c^2}$$

mit

$$p = mv = \gamma\, m_0\, v\,.$$

Die Teilchenmasse ist energieabhängig

$$m = \gamma m_0 \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{E}{m_0 c^2}\,.$$

Nach dem 2. Newton'schen Gesetz benötigt man zur *Beschleunigung* die *Kraft*

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}\,.$$

Welche Kräfte (Wechselwirkungen) gibt es in der Natur?

Kraft	relative Stärke	Reichweite [m]	betroffene Teilchen
Gravitation	$6 \cdot 10^{-39}$	∞	alle Teilchen
Elektro-magnetismus	1/137	∞	geladene Teilchen
starke Kraft	≈ 1	10^{-15} - 10^{-16}	Hadronen
schwache Kraft	10^{-5}	$<< 10^{-16}$	Hadronen & Leptonen

Es bleibt nur die elektromagnetische Wechselwirkung. Die *Lorentzkraft* ist

$$\vec{F} = e\left(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}\right)$$

Die Energieänderung bei Bewegung im EM-Feld ist

$$\Delta E = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\, d\vec{r} = e\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}\right) d\vec{r}$$

Das Magnetfeld $\vec{B}$ bewirkt keine Energieänderung. Energiegewinn erfolgt nur mit *elektrischen Feldern*:

$$\Delta E = e\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\, d\vec{r} = eU$$

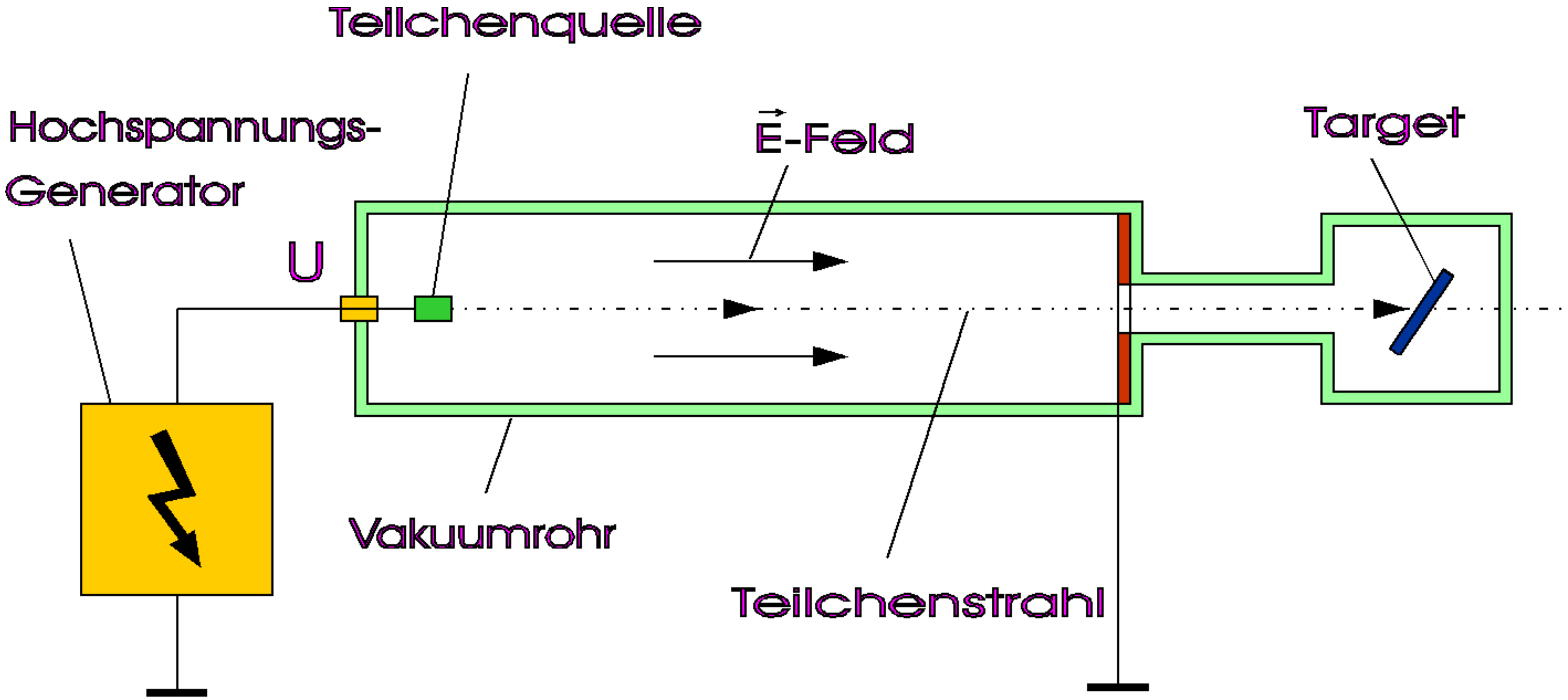
In der Beschleunigerphysik werden daher die Grundlagen der *klassischen Elektrodynamik* angewendet. Hier spielen die

Maxwell'schen Gleichungen

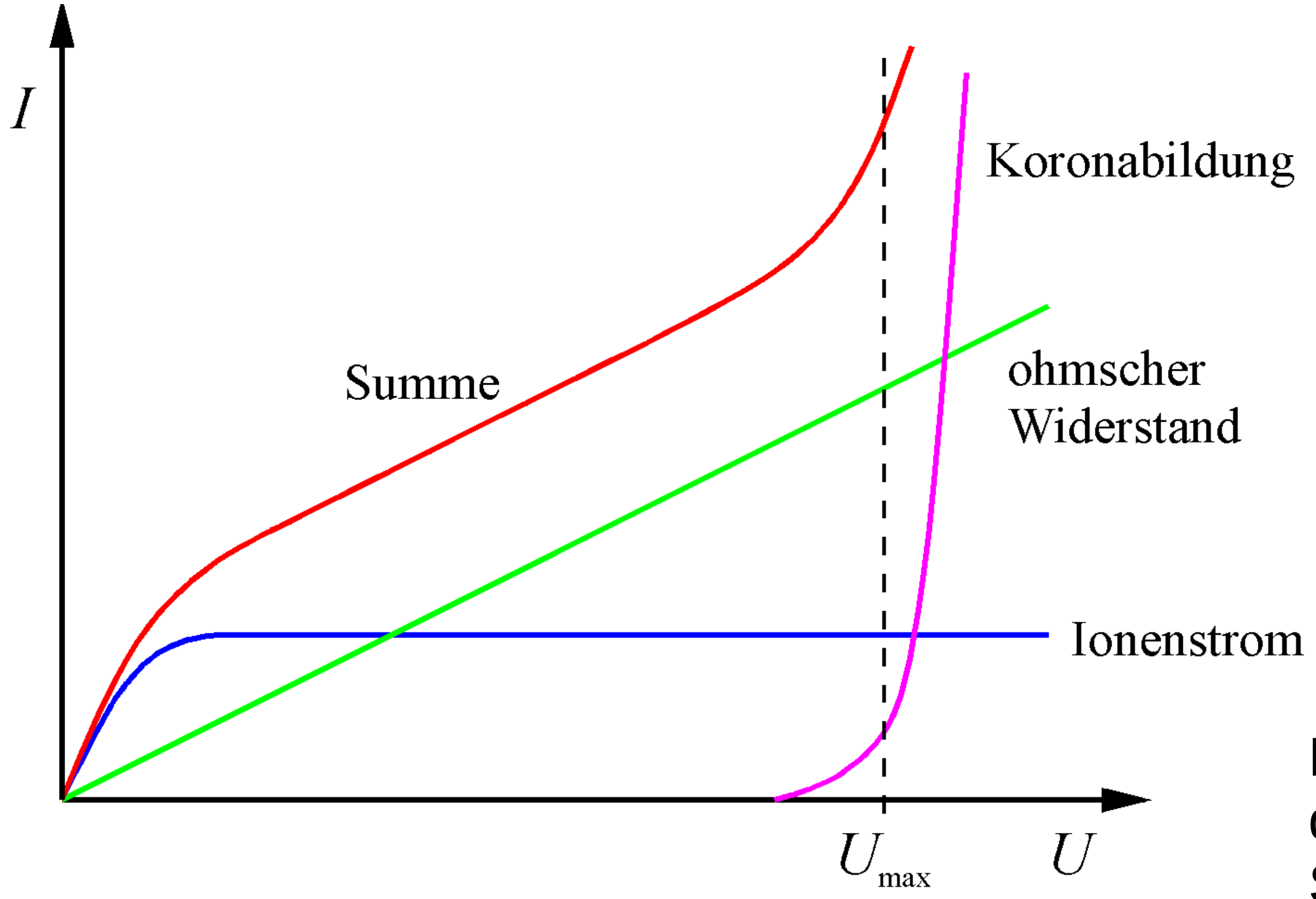
eine entscheidende Rolle. Außerdem benötigt man die *spezielle Relativitätstheorie*.

Entwicklung der Beschleuniger

Prinzip der Gleichspannungsbeschleuniger:



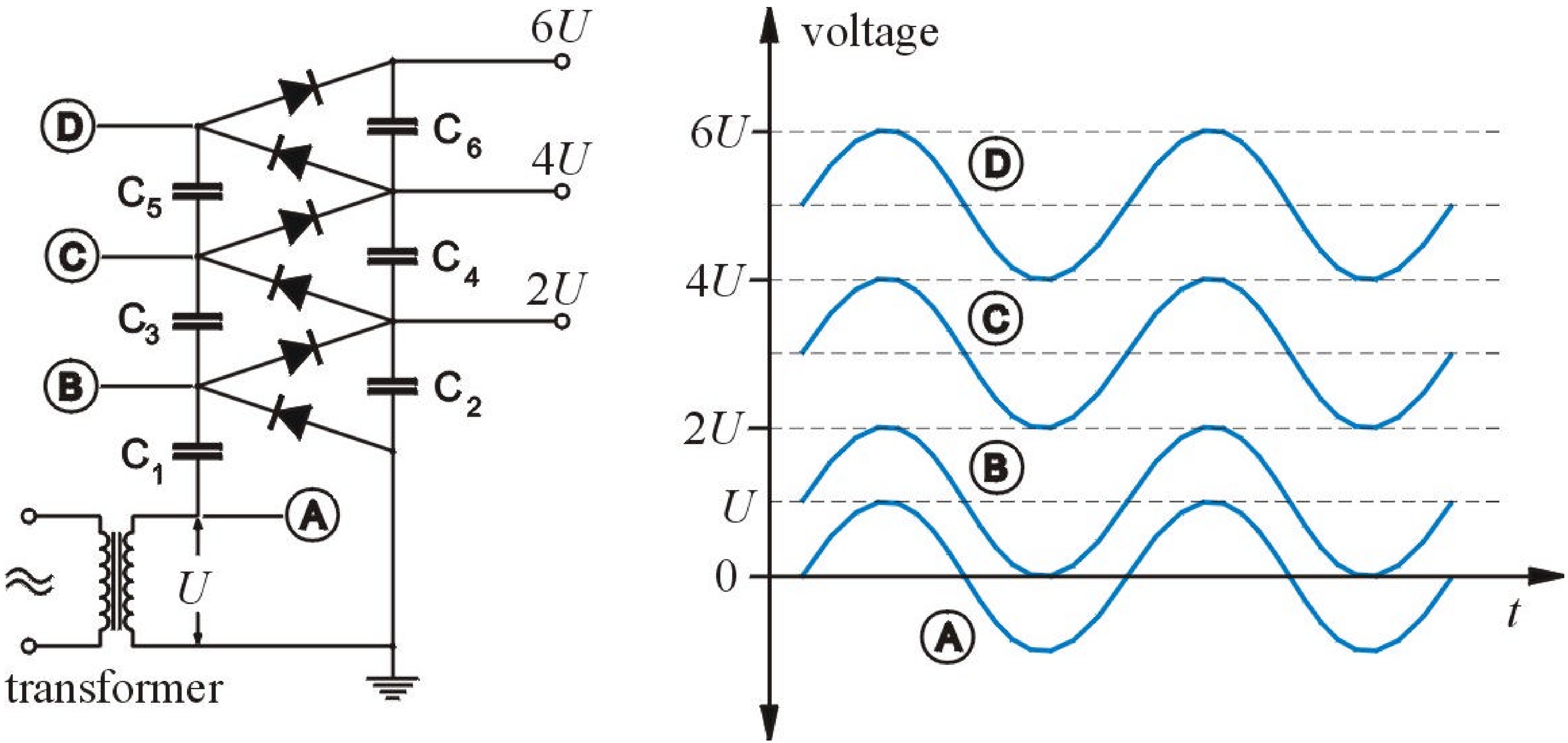
Abhängigkeit des Stromes von der Spannung:



Die Koronabildung definiert die Spannungsgrenze.

Der Cockroft-Walton-Kaskadengenerator

Anfang der 30er Jahre entwickelten *Cockroft* und *Walton* einen Hochspannungsgenerator für 400 kV („*Greinacker-Schaltung*“).



Am Punkt A ist die Spannung

$$U(t) = U \sin \omega t$$

Die stromabhängige Gesamtspannung ist

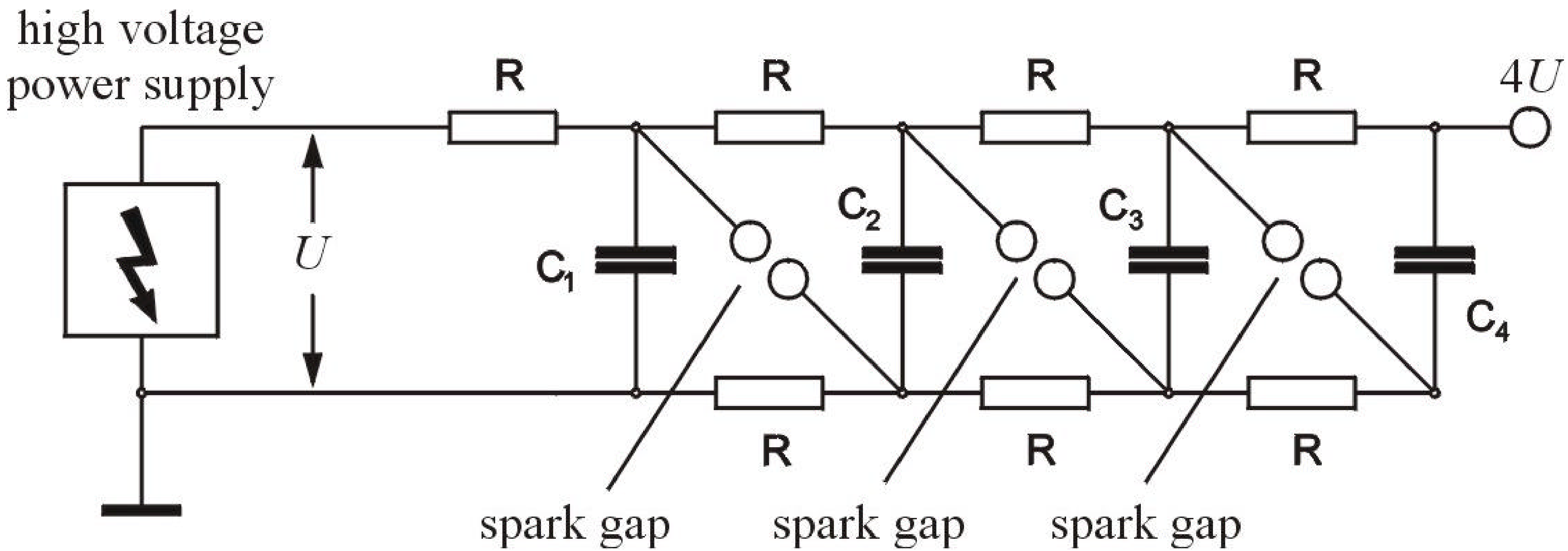
$$U_{\text{ges}} = 2Un - \frac{2\pi I}{\omega C}\left(\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{12}n\right)$$

hohe Frequenz ω und große Kapazität C reduzieren den Einfluß des Stromes.

Es wurden Spannungen bis $U = 4\ \mathrm{MV}$ erreicht und im Pulsbetrieb von einigen $\mu\mathrm{s}$ Dauer Strahlströme von mehreren $100\ \mathrm{mA}$

Der Marx-Generator

Er kann nur kurze Hochspannungspulse erzeugen, aber dafür sehr hohe Ströme liefern.



Nach Zünden der Funkenstrecken liegen alle Kondensatoren in Serie, die Gesamtspannung ist also

$$U_{\text{ges}} = nU$$

Folgende Werte wurden erreicht:

$$n = 100, \quad C = 2\ \mu\text{F}, \quad U = 20\ \text{kV}$$
$$\tau = 40\ \text{ns}, \quad I = 500\ \text{kA}$$

Mit einem anderen Marx-Generator wurden 1932 Spitzenspannungen um 6 MV erzeugt.

Der Van de Graaff-Beschleuniger

1930 begann Van de Graaff mit der Entwicklung eines Hochspannungsgenerators.

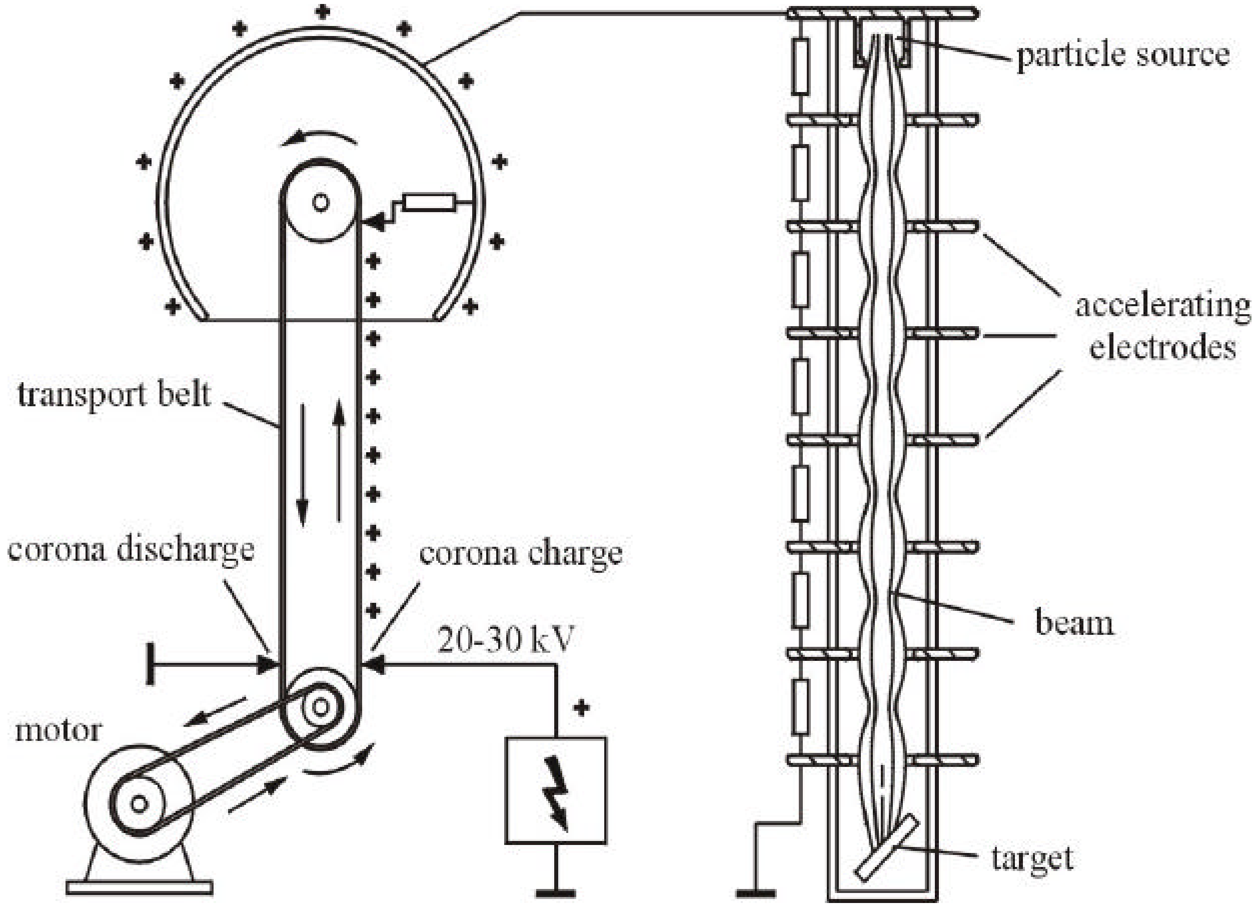
Unter normalen Bedingungen werden Spannungen bis

$$U_{\max} = 2\ \mathrm{MV}$$

erzeugt. In einem Tank mit Isoliergas (z.b. SF_6) unter einem Druck von ca. 1 MPa sind Spannungen bis

$$U_{\max} = 10\ \mathrm{MV}$$

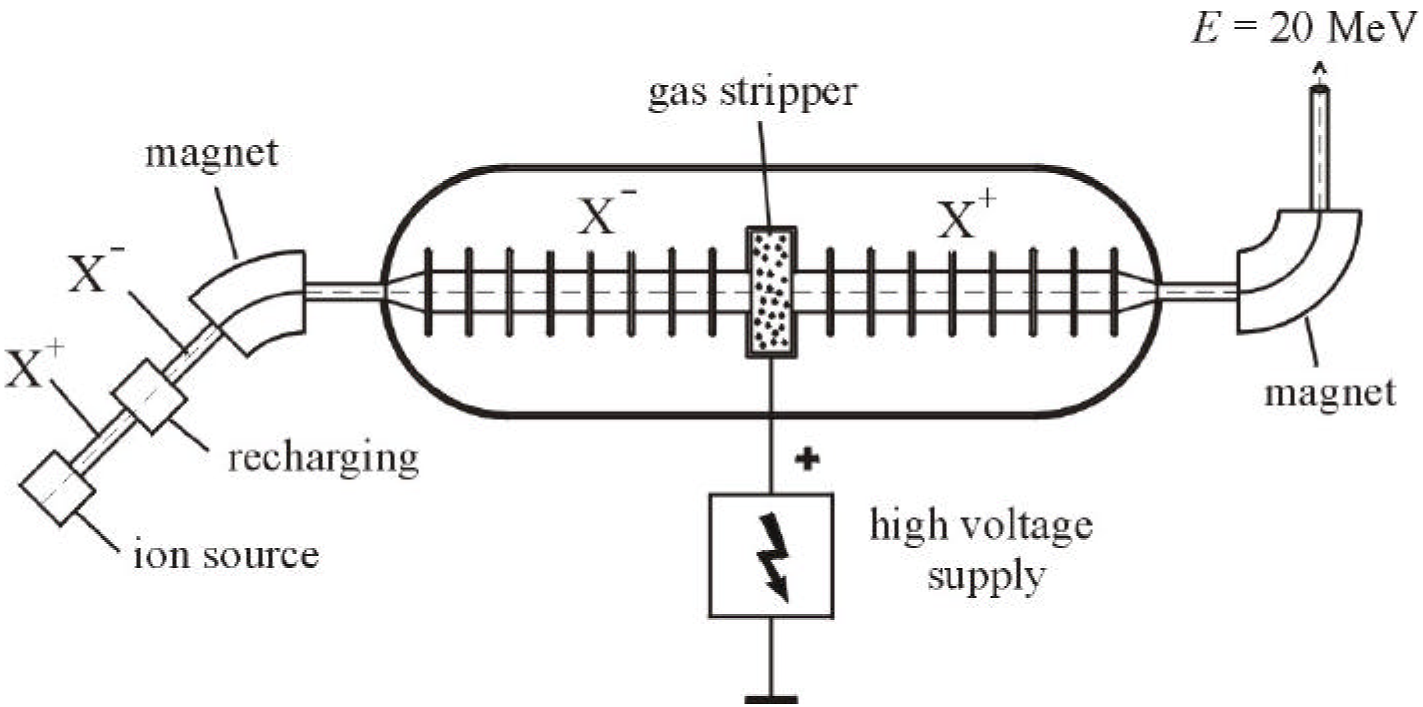
möglich.



5 MeV
Van-de-Graaff
am
Hahn-Meitner-Institut
in Berlin

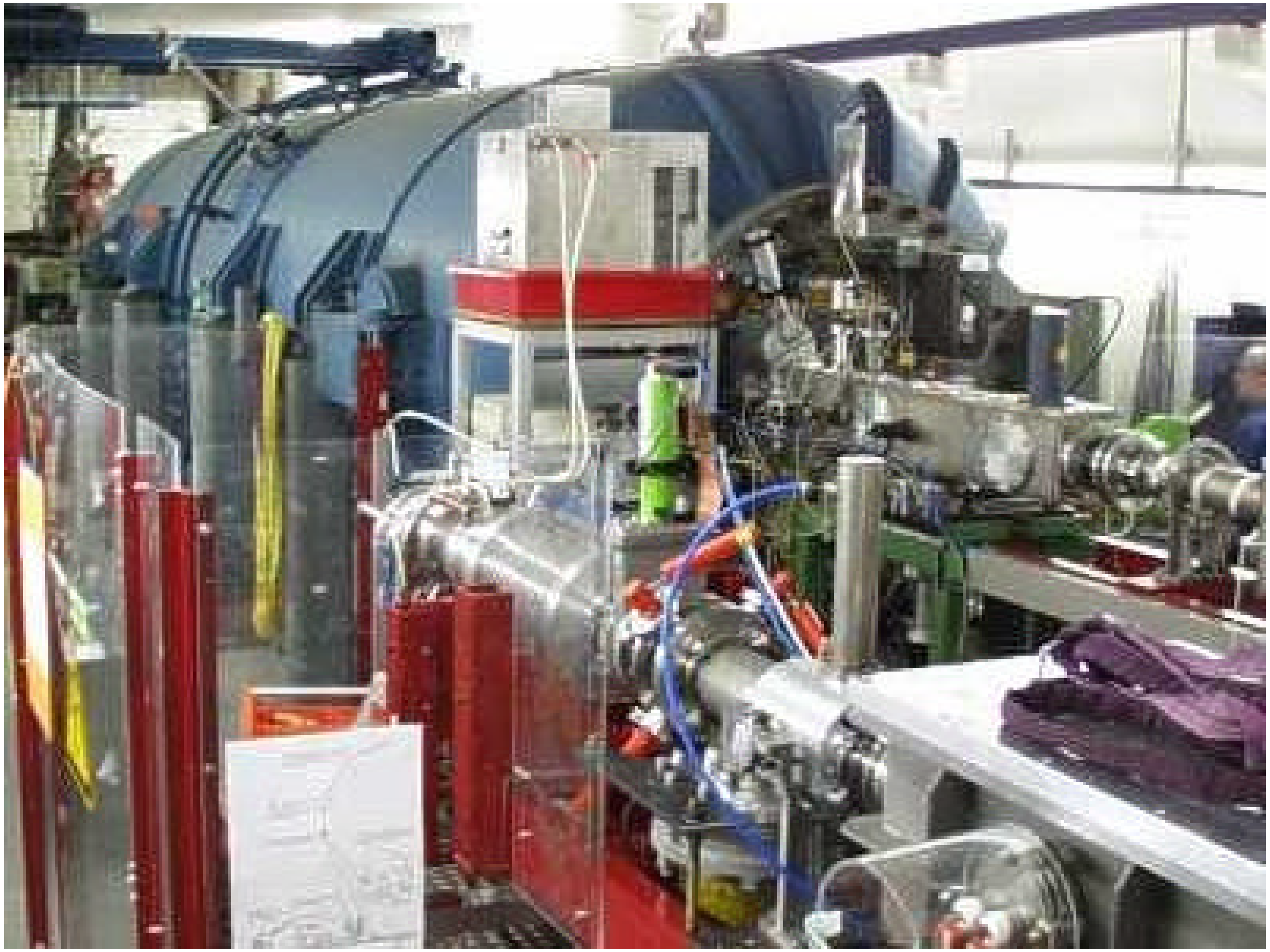
Der Tandem-Beschleuniger

Durch *Umladung von Ionen* während der Beschleunigung kann das Potential zweimal genutzt und damit die Energie verdoppelt werden.



Van de Graaff baute 1936 erstmals einen Beschleuniger nach diesem Prinzip, das auch als „Tandem-Beschleuniger“ bezeichnet wird.

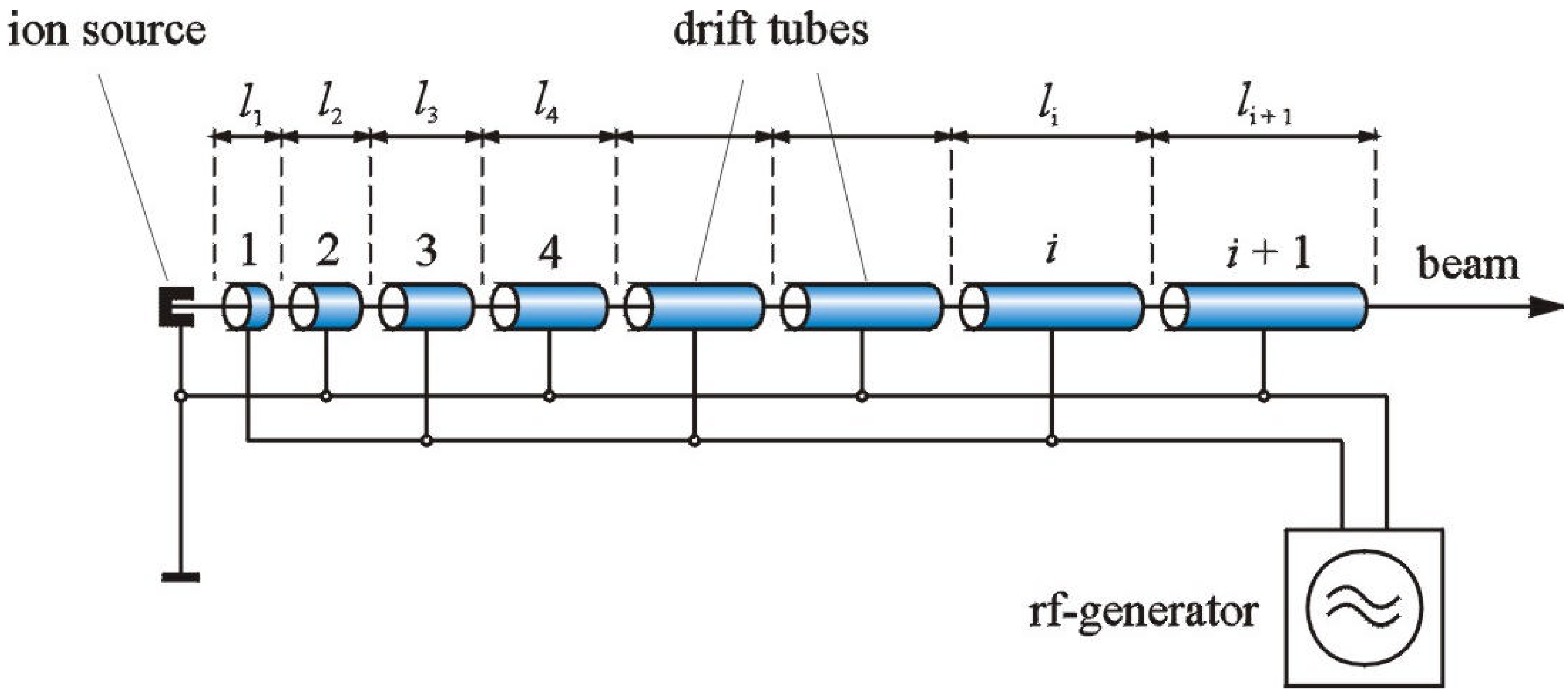
Bei vielfach ionisierten Ionen können Energien bis 1000 MeV erreicht werden.



Tandem-Beschleuniger der Uni Köln

Der Linearbeschleuniger

Der Schwede *Ising* hat 1925 vorgeschlagen, zur Beschleunigung schnell wechselnde Felder zu benutzen. 1928 gelang *Wideröe* der erfolgreiche Test.



Ein HF-Sender liefert die hochfrequente Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \sin \omega t$$

Nach der i-ten Röhre haben die Teilchen mit der Ladung q die Energie

$$E_\mathrm{i} = i\,q U_0 \sin \Psi_\mathrm{s} \qquad (1)$$

In der i-ten Röhre wurde die kinetische Energie

$$E_\mathrm{i} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{i}^2 \quad \text{wenn} \quad v_\mathrm{i} << c \qquad (2)$$

erreicht.

Beim Durchlaufen einer Driftstrecke vergeht gerade eine halbe Periodendauer $\tau_{\mathrm{HF}}/2$. Dann ist der Abstand zwischen dem i-ten und dem $(i+1)$-ten Spalt

$$l_\mathrm{i} = \frac{v_\mathrm{i}\,\tau_\mathrm{HF}}{2} = \frac{v_\mathrm{i}}{2\,\nu_\mathrm{HF}} = \frac{v_\mathrm{i}\lambda_\mathrm{HF}}{2\mathrm{c}} = \beta_\mathrm{i}\frac{\lambda_\mathrm{HF}}{2}. \qquad (3)$$

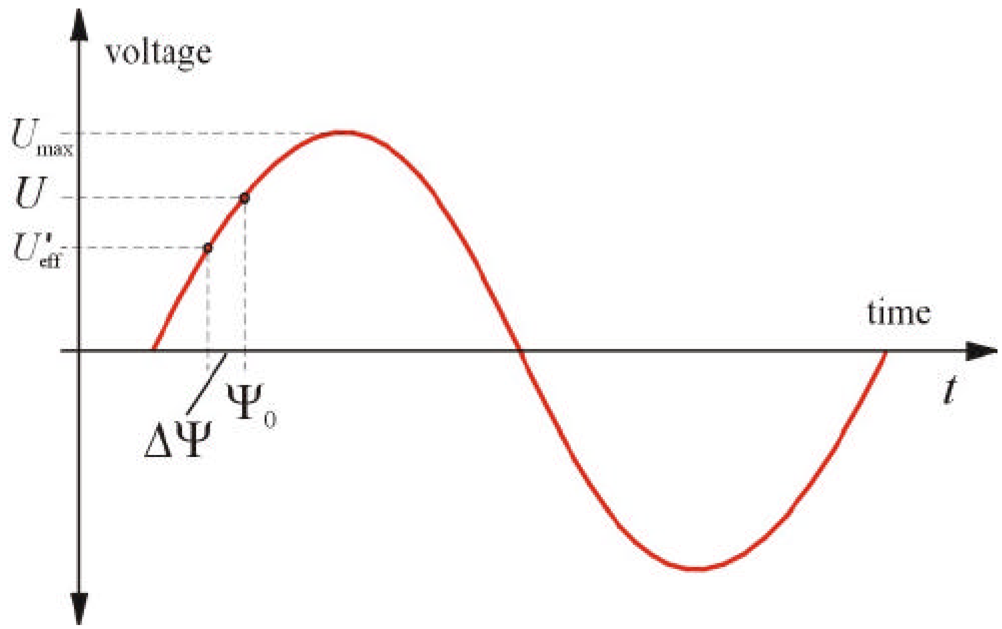
Die Frequenz n_{HF} ist konstant. Aus (1) bis (3) folgt

$$l_\mathrm{i} = \frac{1}{\nu_\mathrm{HF}}\sqrt{\frac{i\,q U_0 \sin \Psi_\mathrm{s}}{2\,\mathrm{m}}}$$

also

$$l_\mathrm{i} \propto \sqrt{i}$$

Phasenfokussierung:



Ein Teilchen mit zu hoher Geschwindigkeit kommt zu früh und sieht die Spannung

$$U_s' = U_0 \sin(\Psi_s - \Delta\Psi) < U_0 \sin\Psi_s$$

und wird weniger stark beschleunigt.

Heute werden Hohlleiter anstelle der Driftröhren eingesetzt. Erste Studien von Beams und Hansen in den Jahren 1933 und 1934.

Der größte Linearbeschleuniger steht am Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) in Kalifornien:

Das Zyklotron

Es wird ein homogenes Magnetfeld der Art

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} \qquad (1)$$

angenommen. Ein Teilchen mit der Ladung e und der Geschwindigkeit v folgt der Bewegungsgleichung

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = e\,\vec{v} \times \vec{B} \qquad (2)$$

Die Bewegung verlaufe nur in der x-y-Ebene, also

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Mit (1) und (3) berechnet man das Kreuzprodukt in (2) und erhält

$$\dot{\vec{p}} = e \begin{pmatrix} v_y B_z \\ -v_x B_z \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

oder in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= m\dot{v}_x = e\,v_y B_z \\ \dot{p}_y &= m\dot{v}_y = -e\,v_x B_z \end{aligned} \qquad (5)$$

Nochmaliges Differenzieren und Umformen liefert

$$\begin{aligned} \ddot{v}_x + \frac{e^2}{m^2} B_z^2\, v_x &= 0 \\ \ddot{v}_y + \frac{e^2}{m^2} B_z^2\, v_y &= 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

mit den Lösungen

$$v_x(t) = v_0 \cos\omega_z t \qquad (7)$$
$$v_y(t) = v_0 \sin\omega_z t$$

Die Teilchen laufen in der x-y-Ebene auf einem Kreis mit der konstanten Frequenz

$$\boxed{\omega_z = \frac{e}{m} B_z} \qquad (8)$$

um. Sie wird als *Zyklotronfrequenz* bezeichnet.

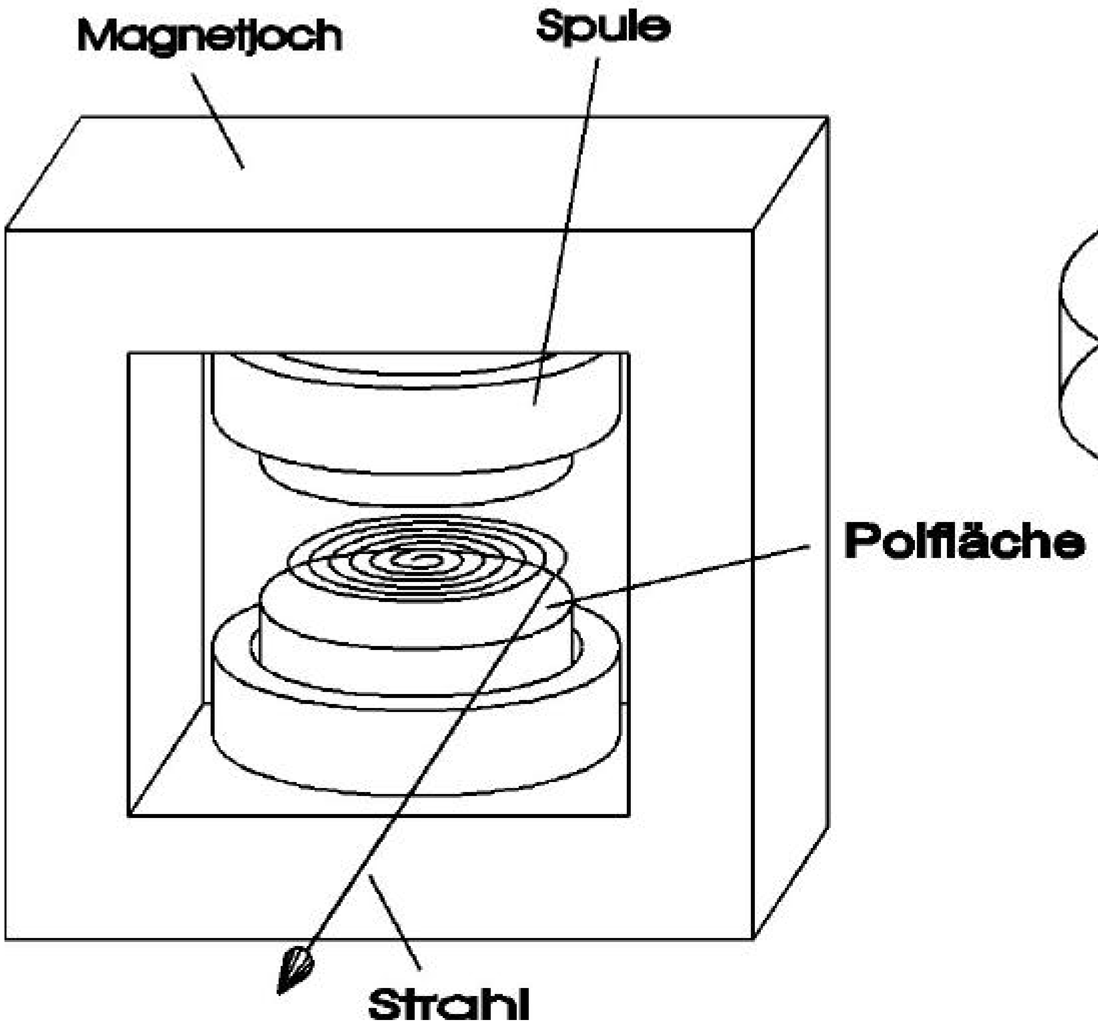
Auf diesem Prinzip basiert das Zyklotron. Es wurde 1930 von *Lawrence* vorgeschlagen. Mit *Livingston* baute er 1932 das erste praktisch nutzbare Zyklotron, Experimente Teilchenstrahlen bis zu einer Energie von 1.2 MeV lieferte.

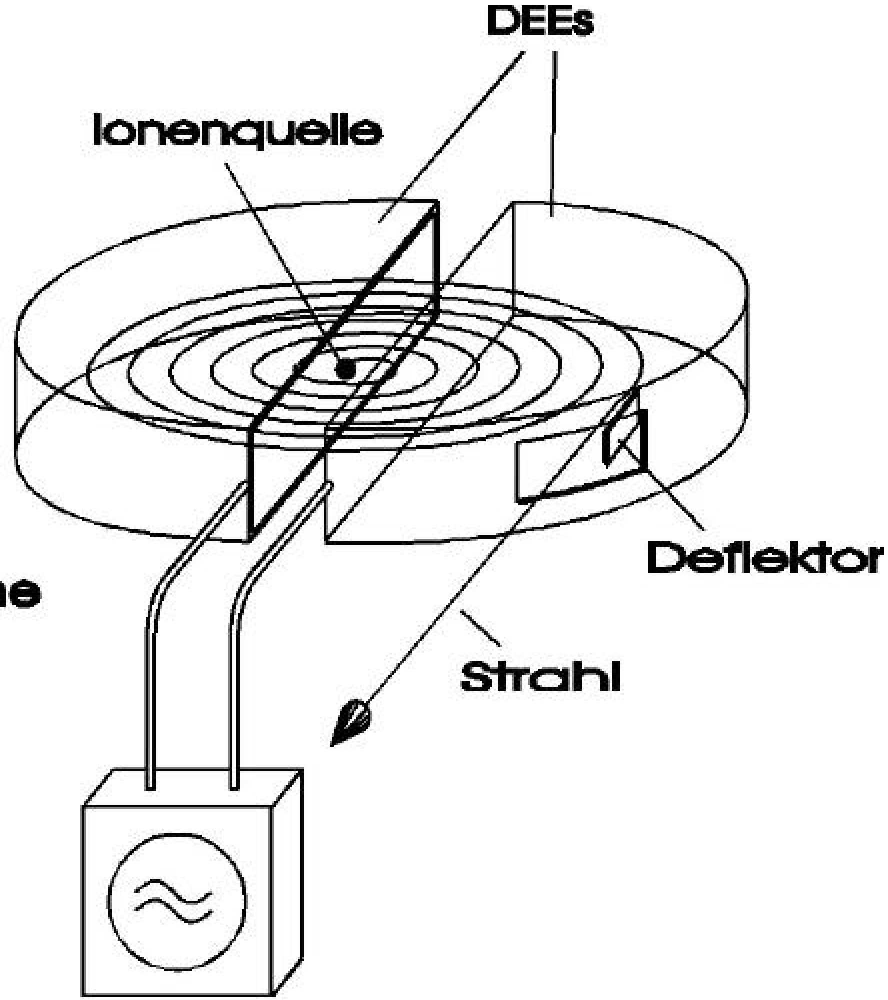
Zur Beschleunigung benutzt man eine HF-Spannung mit der konstanten Frequenz

$$\omega_{HF} = \omega_z$$

Beschleunigt werden Protonen, Deuteronen und α-Teilchen bis etwa 22 MeV pro Elementarladung. Die HF-Frequenz liegt um 10 MHz.

Prinzip des Zyklotrons:





Die Teilchengeschwindigkeit ist $v \approx 0.15c$. Bei höheren Energien sinkt die Zyklotronfrequenz

Das Isozyklotron der Uni Bonn

$$\omega_z = \frac{e B_z}{\gamma m_0}$$

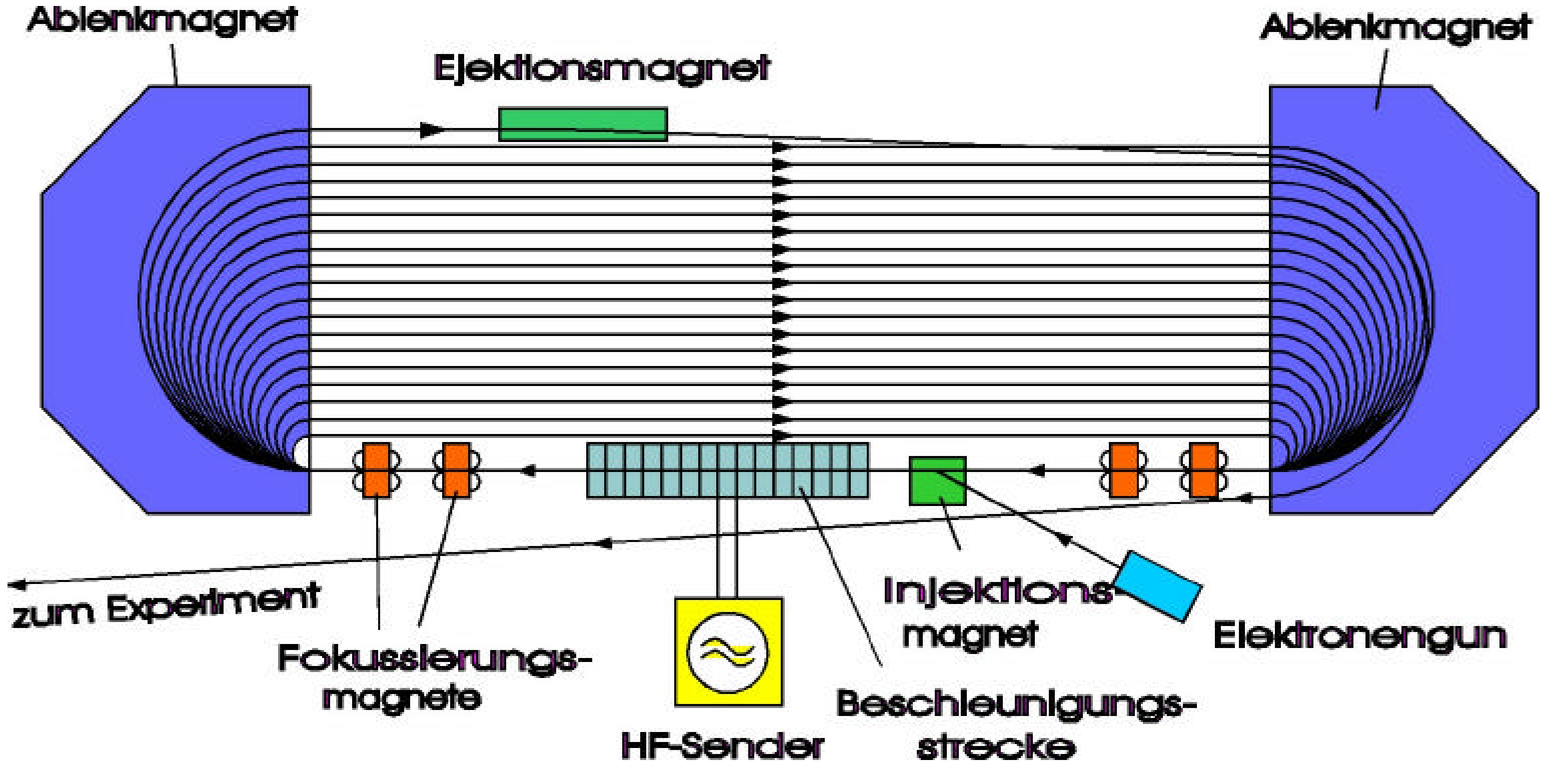
Entweder fährt man die Frequenz mit („*Synchro-zyklotron*"), oder man ändert das Magneteld radial nach

$$\omega_z = \frac{e B_z(r)}{\gamma m_0} = \text{const.}$$

(„*Isozyklotron*").

Das Mikrotron

Für Elektronen ist das Zyklotron nicht geeignet, da sie sehr schnell relativistische Geschwindigkeiten erreichen.



Beim Mikrotron geht man praktisch von extrem relativistischen Geschwindigkeiten aus ($v = c$) und ändert von Umlauf zu Umlauf die Bahnlänge jeweils exakt um ein Vielfaches der HF-Wellenlänge. Dann sieht das Teilchen bei jedem Umlauf dieselbe (stabile) HF-Phase.

Die Dauer eines Umlaufs auf der *i*-ten Bahn ist

$$t_i = \frac{2(\pi R_i + l)}{v_i} \qquad (1)$$

Mit der Zentrifugalkraft F_z und der Lorentzkraft F_L

$$F_z = m\frac{v_i^2}{R_i} \quad \text{und} \quad F_L = e v_i B \qquad (2)$$

folgt

$$R_i e v_i B = m v_i^2 \qquad (3)$$

Der Bahnradius ist

$$R_i = \frac{v_i m c^2}{e c^2 B} = \frac{v_i}{e c^2 B} E_i \qquad (4)$$

Nach Einsetzten in (1) erhält man die Zeitdifferenz zwischen dem *i*-ten und dem (*i* + 1)-ten Umlauf zu

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{2\pi}{ec^2 B}(E_{i+1} - E_i) = \frac{2\pi}{ec^2 B}\Delta E \qquad (5)$$

Diese Differenz muß einem ganzzahligen Vielfachen der HF-Periode entsprechen:

$$\Delta t = \frac{k}{\nu_{HF}} \qquad (6)$$

Der Energiegewinn pro Umlauf ist

$$\boxed{\Delta E = k\frac{ec^2 B}{2\pi \nu_{HF}}} \qquad (7)$$

Beispiel:

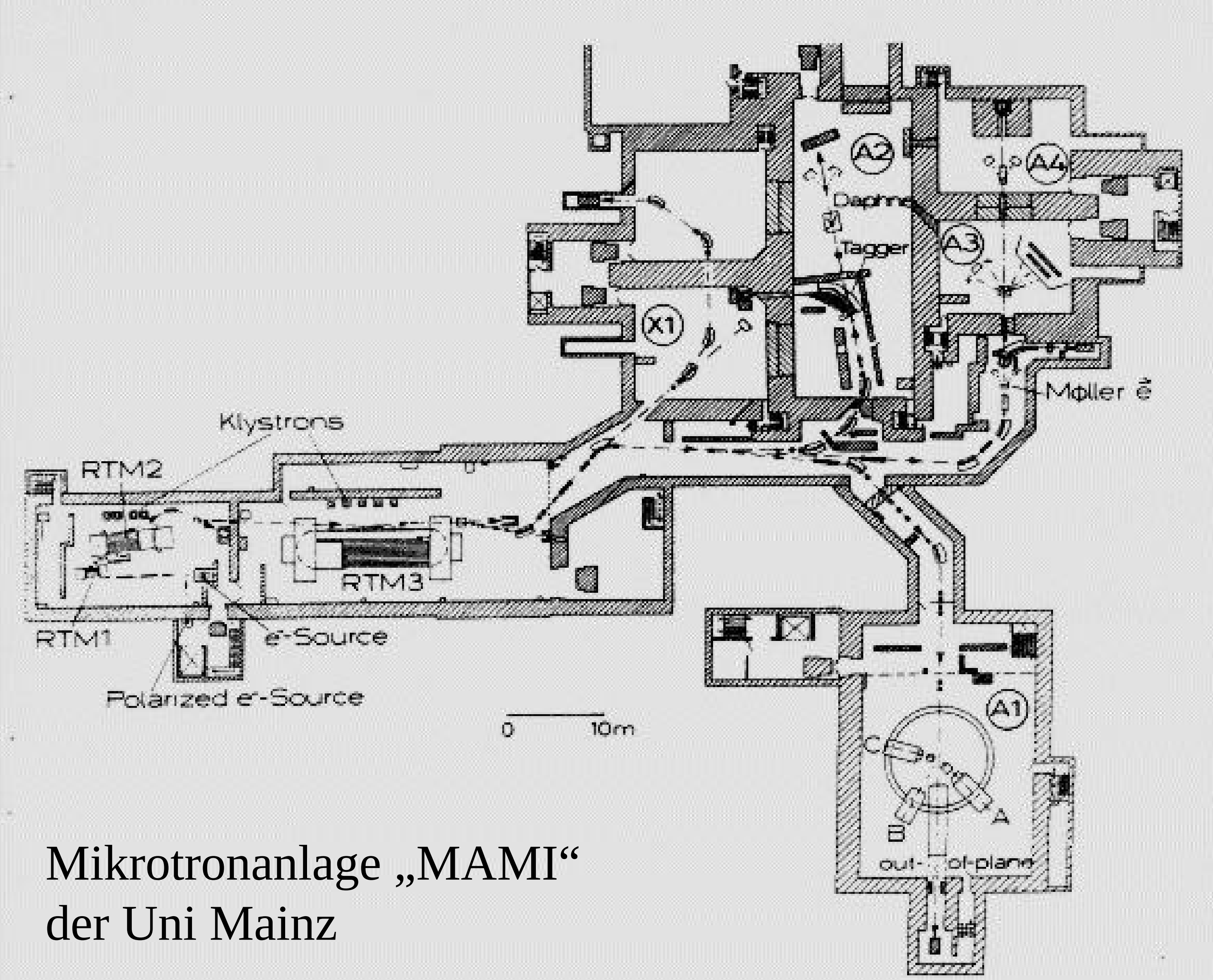
$B = 1$ T,

$\nu_{HF} = 3$ GHz
$k = 1$

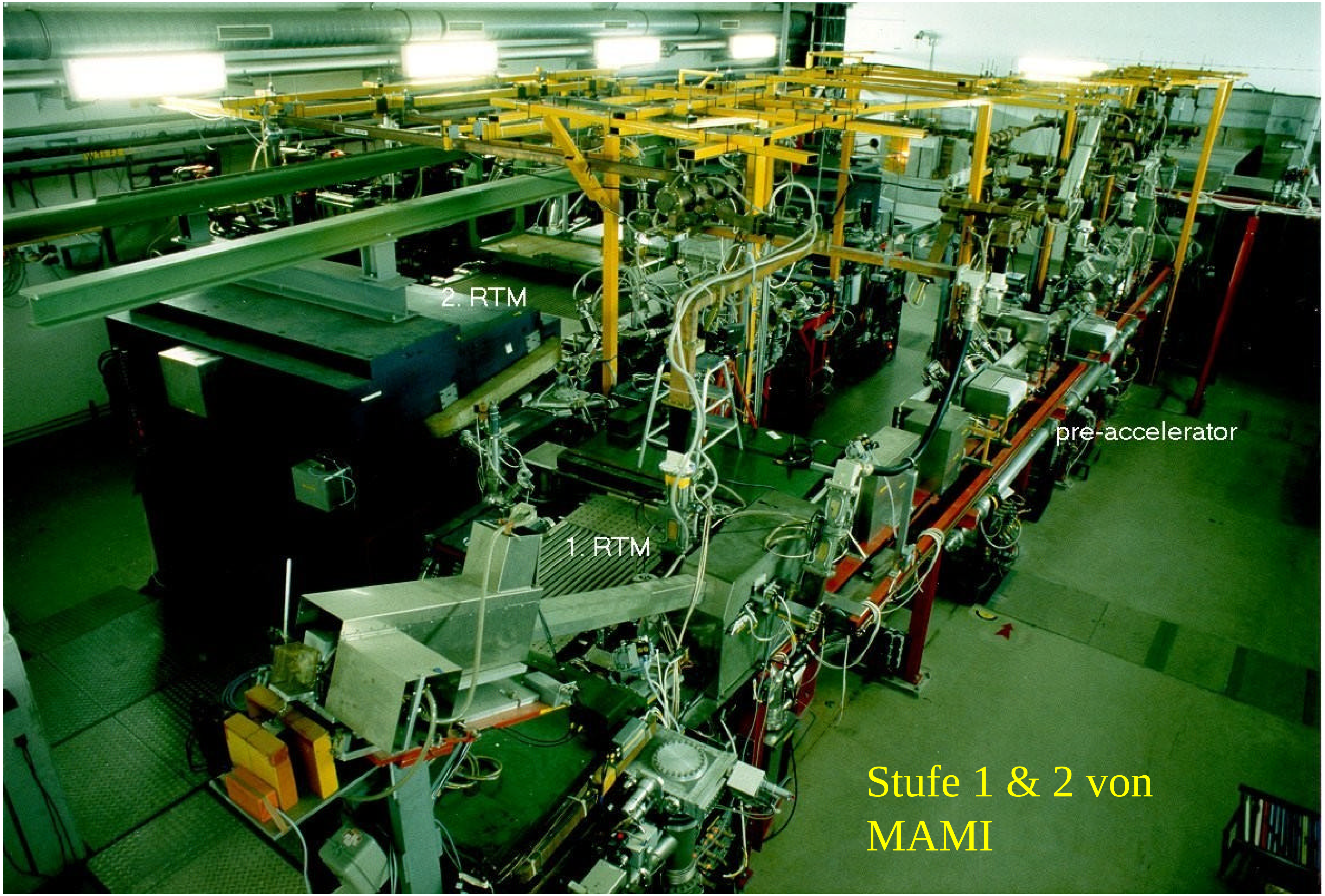
$\Rightarrow \quad \Delta E = 4.78$ MeV

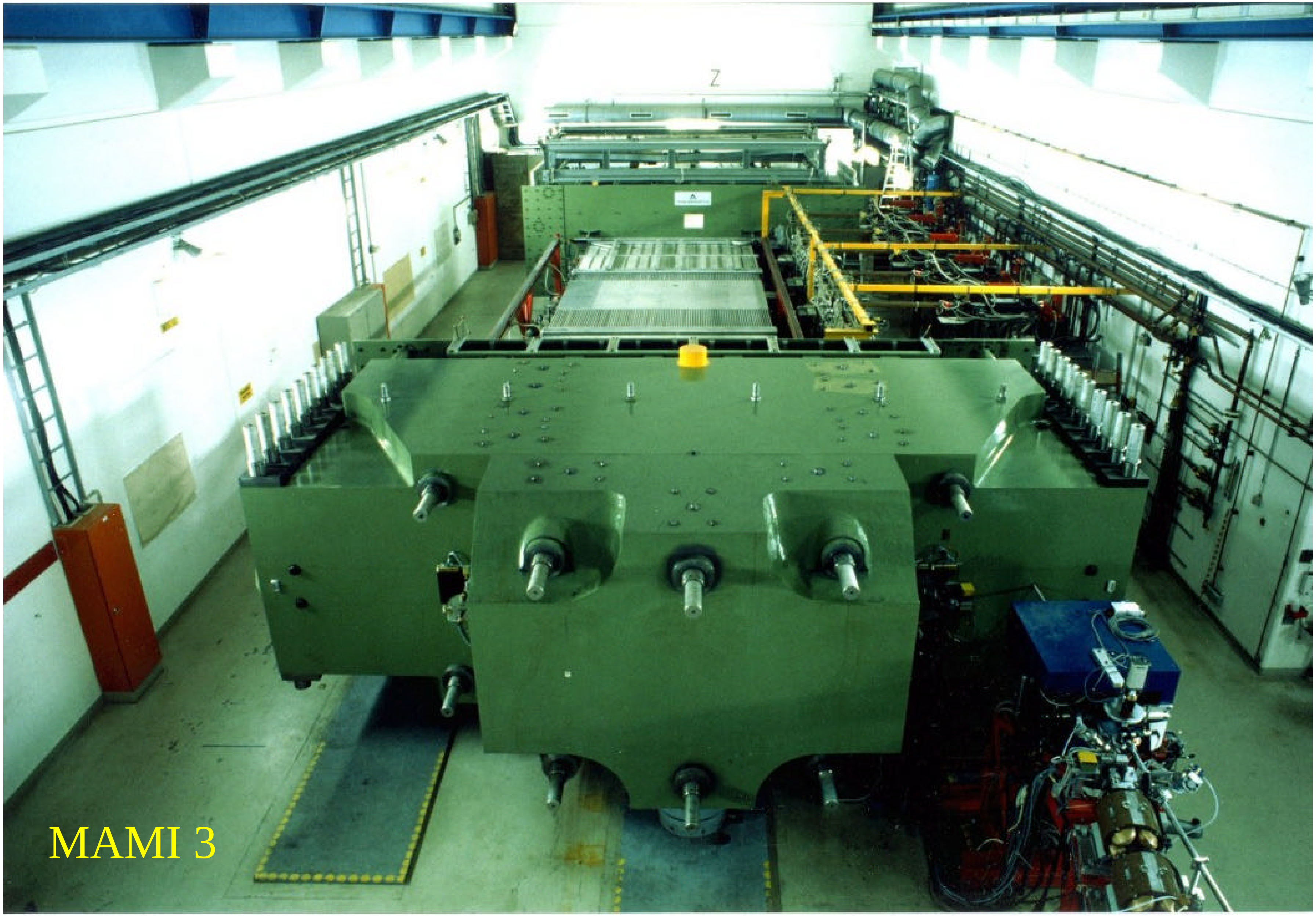
Beispiel eines
50 MeV-Mikrotrons

Das größte Mikrotron ist „MAMI“ an der Uni Mainz mit einer End-energie über 800 MeV



Mikrotronanlage „MAMI“ der Uni Mainz


2. RTM
1. RTM
pre-accelerator
Stufe 1 & 2 von
MAMI


MAMI 3