Kernkräfte und Kernmodelle:

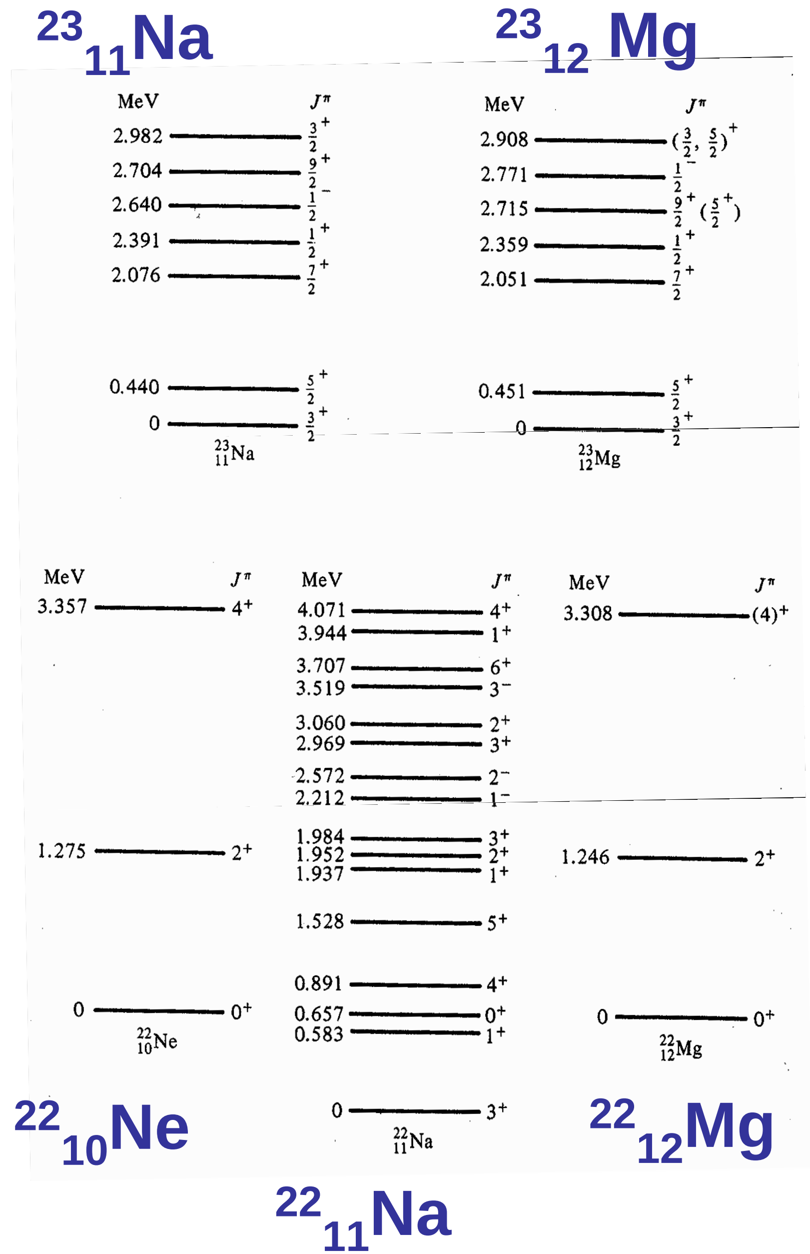
- Deuteron

Wiederholung: Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte

Neutronen und Protonen haben nicht nur fast die gleiche Masse, sondern sind auch in ihrer Kernwechselwirkung ähnlich.

Dies sieht man an ihren ähnlichen Bindungsenergien und, noch deutlicher, an den Energiezuständen der "Spiegelkerne".

Spiegelkerne sind Paare von Isobaren (gleiches A), bei denen die Protonenzahl des einen Nuklids gleich der Neutronenzahl des anderen ist.



Beispiel:

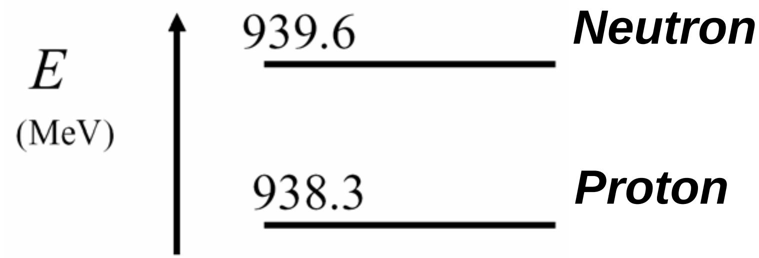
Isobare Kerne mit A=22 und 23

Isospin

Werner Heisenberg
1901-1976

Nobelpreis 1932

- Beobachtung: $m_n \sim m_p$
Nur kleiner Massenunterschied
von 1.29 MeV



- Proton und Neutron koppeln gleich stark an starke Wechselwirkung

- Starke Wechselwirkung kann Proton/Neutron nicht unterscheiden

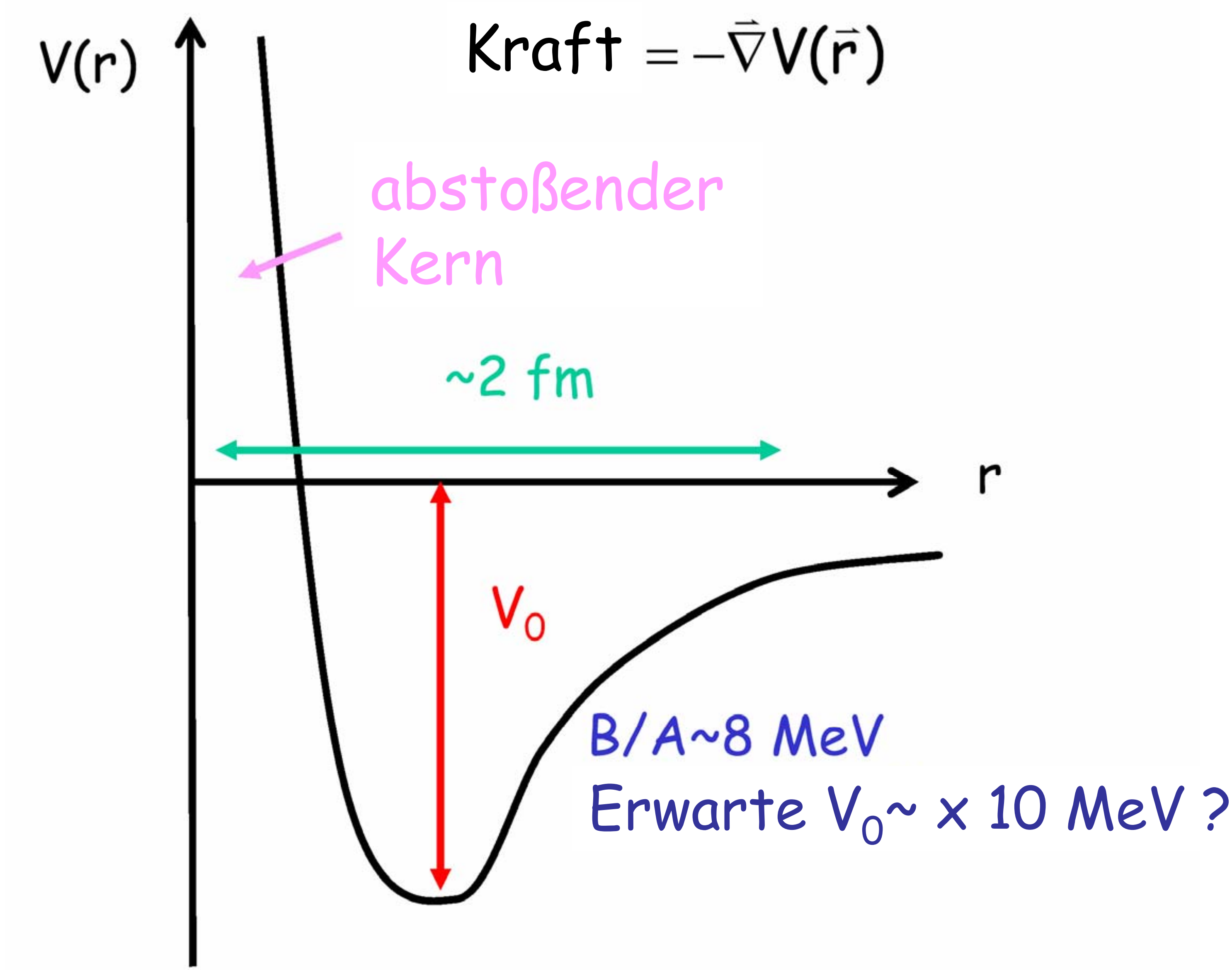
- Proton und Neutron sind für starke WW Zustände eines Teilchens
$\rightarrow$ Nukleon
- Unterschied im Isospin I=1/2 mit zwei Zuständen: Proton Neutron

$$\text{Nukleon: } \mathrm{I} = \tfrac{1}{2} \begin{cases} \text{Proton: } & \mathrm{I}_3 = +\tfrac{1}{2} \\ \text{Neutron: } & \mathrm{I}_3 = -\tfrac{1}{2} \end{cases}$$

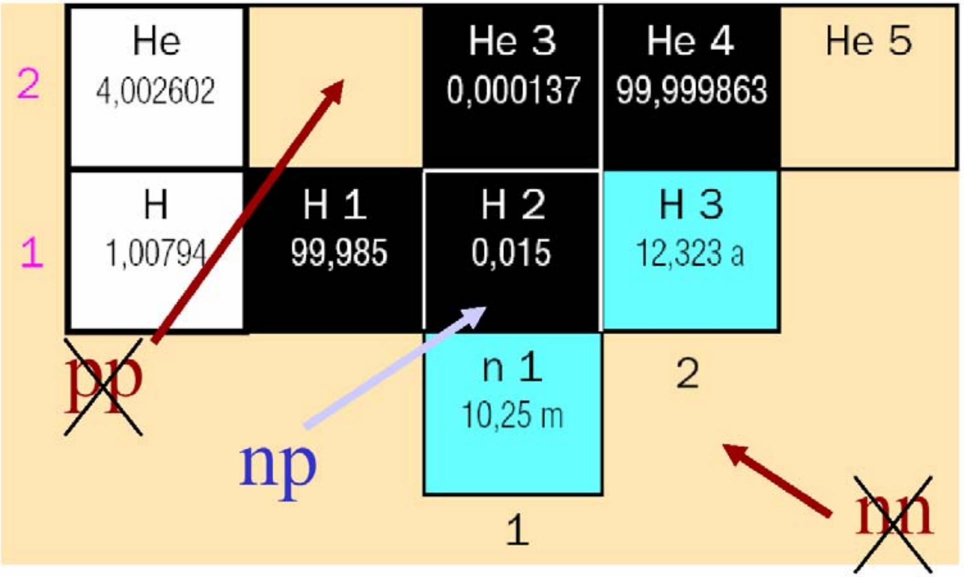
- Unterscheidung durch z.B. elektromagnetische WW möglich

- Starke Wechselwirkung: erhält Isospin!

Naive Erwartung an Kern-Kern-Potential



Deuteron



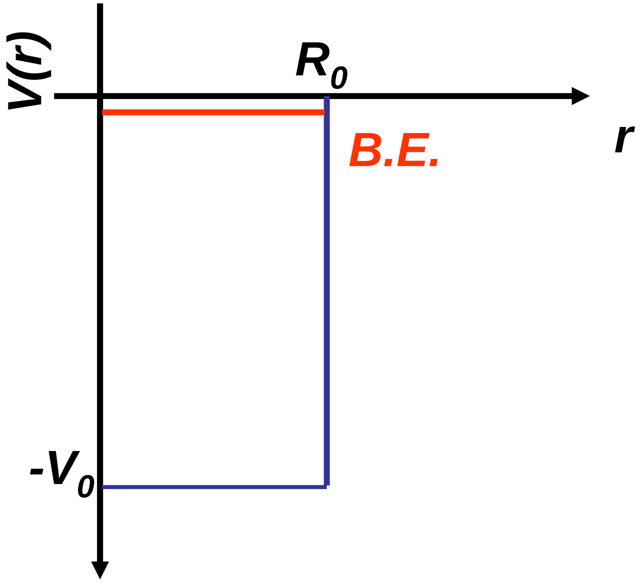
• Das Deuteron ist das einfachste gebundene System von Nukleonen. Leider besitzt das Deuteron keine gebundenen angeregten Zustände (→ keine Analogie zum Wasserstoffatom).
• Es existieren kein Zustände des Di-Protons oder Di-Neutrons.
• Masse und Bindungsenergie
Das Deuteron hat eine Masse von $m(^2H) = 2{,}014\ u$
Bindungsenergie: $B.E. = 2{,}225\ MeV$
• Bindungsenergie ist gleich der Energie des emittierten Photons, γ-Quants bei der Bildung eines Deuterons beim Neutroneneinfang am Proton.

Deuteron

Annahmen zur Lösung der Schrödingergleichung

- Zweikörperproblem wird auf ein eindimensionales Problem reduziert,
- Relativabstand *r* zwischen Proton und Neutron,
- Annahmen: einfaches Zentralpotenzial mit Rechteckform, Potenzial hat die Tiefe $-V_0$ und die Breite R_0
- Die beiden Nukleonen befinden sich im niedrigsten Zustand des Systems in einem Zustand mit relativem Bahndrehimpuls $l = 0$

Einfachste Näherung: Kastenpotential



Einfache quantenmechanische Rechnung zum Deuteron

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

Stationäre Schrödinger-Gleichung

$$(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x,y,z))|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

Separation der Schrödinger-Gleichung in Radial- und Winkelanteil.

$$|\Psi\rangle = R(r)\,Y(\vartheta,\phi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d}{dr}R(r)) + \left(U(r) + \frac{\lambda\hbar^2}{2mr^2}\right)R(r) = ER(r)$$

Radialgleichung

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}Y(\vartheta,\phi)) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y(\vartheta,\phi) + \lambda Y(\vartheta,\phi) = 0$$

Winkelgleichung

Winkelgleichung wird durch Kugelfunktionen gelöst.

Einfache quantenmechanische Rechnung zum Deuteron

$\lambda = l\,(l+1)$ Mögliche Lösungen für l: positiv und ganzzahlig (Drehimpuls)

$|m| \leq l$

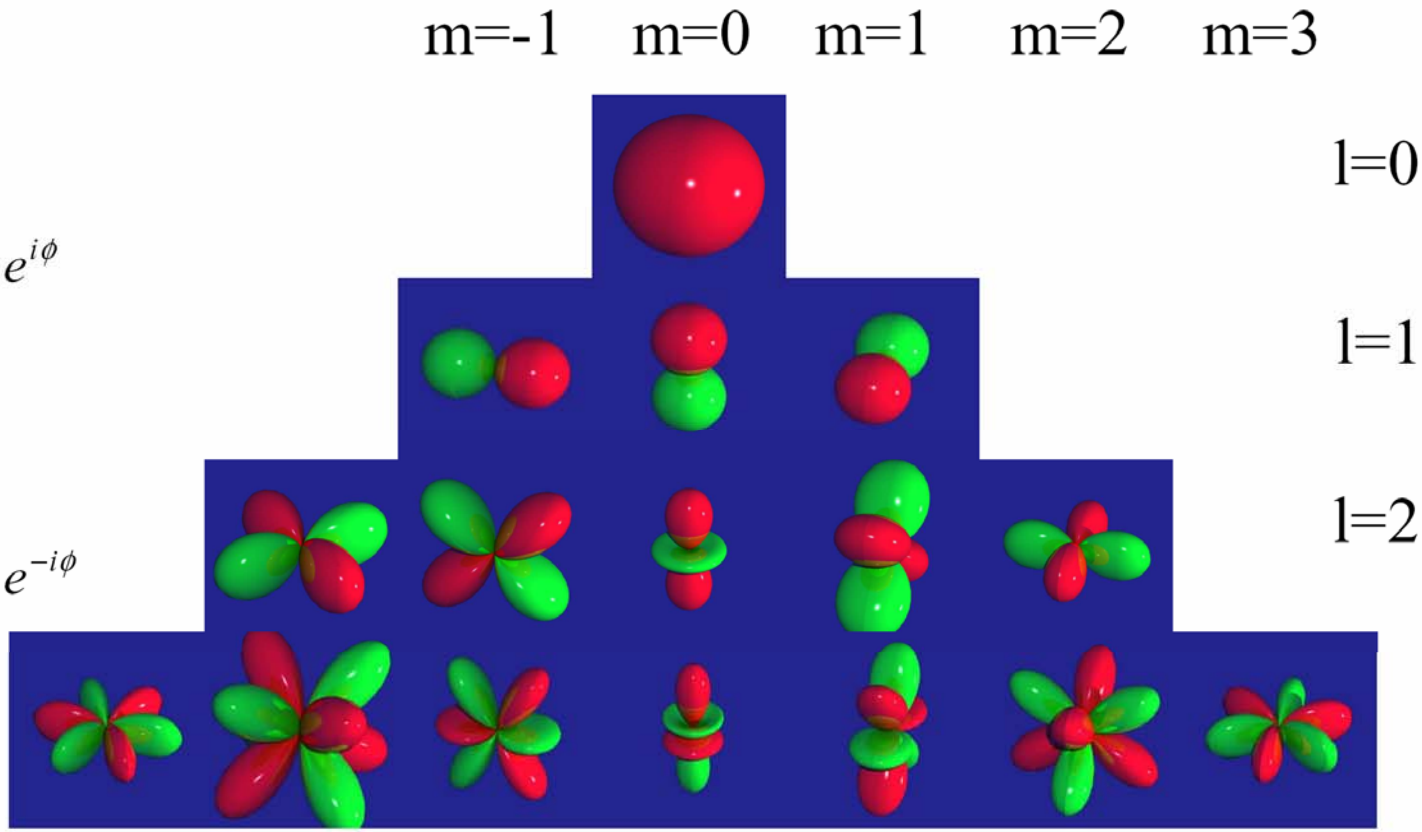
$Y_{l,m}$

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\, e^{i\phi}$$

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$$

$$Y_{1,-1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\, e^{-i\phi}$$



Einfache quantenmechanische Rechnung zum Deuteron

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2}+(V(r)-E)u=0 \qquad \text{mit} \quad \mu=\frac{m_n\cdot m_p}{m_n+m_p}\approx\frac{m_p}{2}\equiv\frac{m}{2}$$

$$u(r)=r\psi(r) \qquad \phi(r,\vartheta,\varphi)=\psi(r)\cdot Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

- *Radialgleichung*
- *reduzierte Masse*
- *Substitution u=rΨ*

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{m}{\hbar^2}(V_0-E_B)u=0 \qquad (r<R_0)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{m}{\hbar^2}E_Bu=0 \qquad (r>R_0)$$

- *Kein Bahndrehimpuls l=0*

-Gleichung für Relativ-bewegung

$$\text{Lösungsansatz:} \qquad u(r)=\alpha e^{ikr}+\beta e^{-ikr}$$

- *vgl. stehende Welle*

für $r<R_0$ (i innen) ist wegen $u_i(0)=0 \quad \alpha_i=-\beta_i$

$$u_i(r)=A_i\cdot\sin k_ir \qquad \text{mit} \quad k_i=\frac{1}{\hbar}\sqrt{m(V_0-E_B)}$$

-Wellenfunktion im Inneren

- Lsg verschwindet im Ursprung und Unendlich.

für $r>R_0$ (a aussen) fällt Wellenfunktion exponentiell in klassisch verbotenem Bereich ab

$$u_a(r)=A_a\cdot e^{-r/R} \qquad \text{mit} \quad k_a=\frac{i}{\hbar}\sqrt{mE_B} \qquad R=\frac{\hbar}{\sqrt{mE_B}}$$

-Wellenfunktion im Äus-
-seren

Einfache quantenmechanische Rechnung zum Deuteron

Stetigkeitsbedingung für $r = R_0$

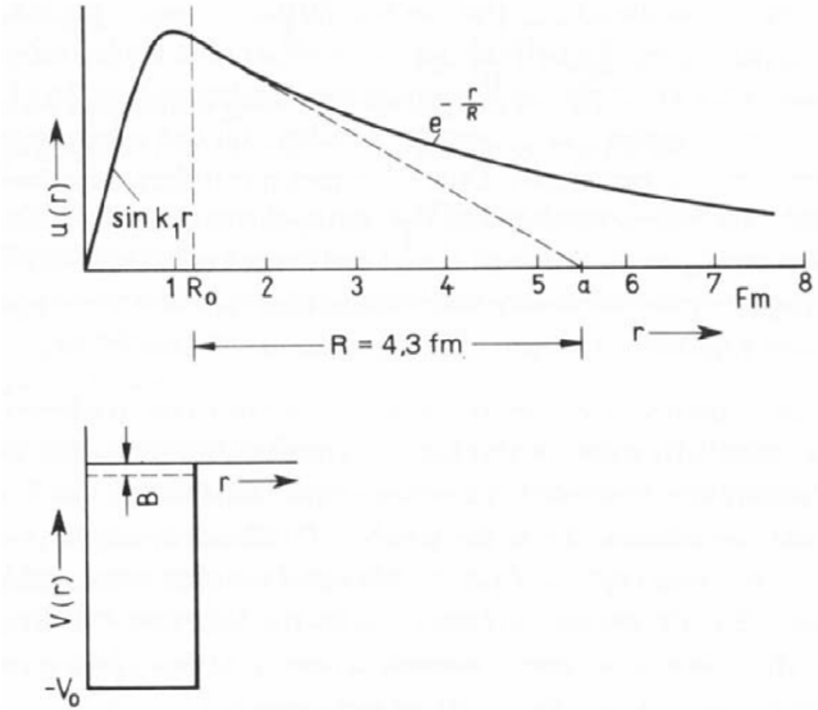
$u_i(R_0) = u_a(R_0) \qquad u_i'(R_0) = u_a'(R_0)$

$$A_i \cdot \sin k_i R_0 = A_a \cdot e^{-R_0/R}$$

$$k_i A_i \cdot \cos k_i R_0 = -\frac{A_a}{R} \cdot e^{-R_0/R}$$

Division ergibt : $k_i \cdot \cot k_i R_0 = -\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{mE_B}}{\hbar}$

$$\cot\left(\sqrt{\frac{m(V_0 - E_B)R_0^{\,2}}{\hbar^2}}\right) = \sqrt{\frac{E_B}{V_0 - E_B}}$$



Die Gleichung läßt sich numerisch lösen.
Abschätzung: Bindungsenergie des Deuterons E_B = 2,225 *MeV* ist bekannt.
Sättigung der Bindungsenergien ergibt Abschätzung für die Reichweite des Nukleon-Nukleon Potenzials: R_0 ~1,4 *fm*

Mit diesem Werten erhält man eine Potenzialtiefe von: ***V_0* ~ 50 *MeV***
Aus dieser Abschätzung kann man V_0 >> E_B folgern, d.h. rechte Seite << *1*
das Argument des cot auf der linken Seite ist ~ *π/2* ist.

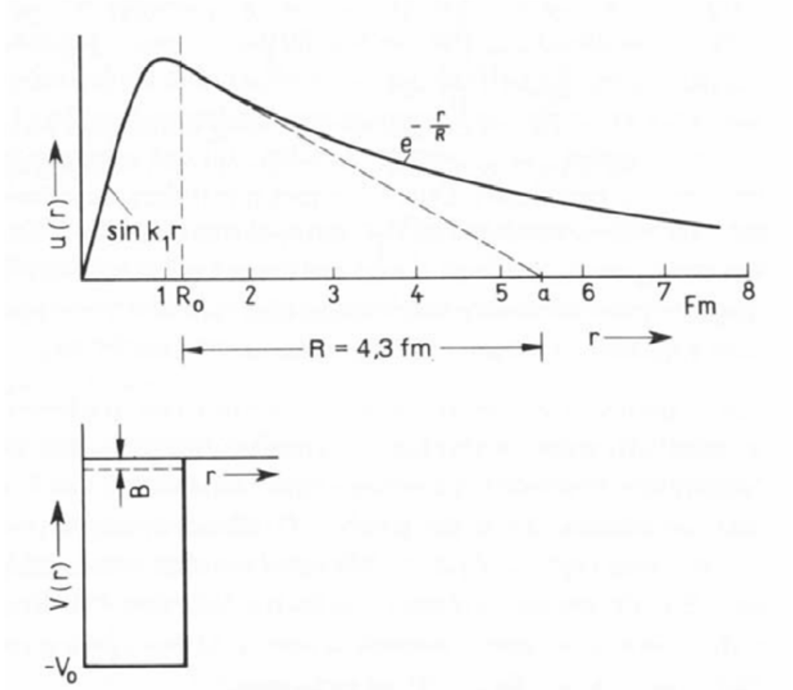
Deuteron: Wellenfunktion

$$\frac{mV_0R_0^{\,2}}{\hbar^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad V_0 \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\hbar^2}{mR_0^{\,2}}$$

Beziehung zwischen der Tiefe des Potenzials und seiner Reichweite:

$$V_0 \approx 100/R_0^{\,2} \quad (V_0 \text{ in MeV}, R_0 \text{ in fm})$$

$$\text{Für } R_0 = 1{,}4\text{fm ist } V_0 \approx 50\text{MeV}$$



Das Nukleon-Nukleon Potenzial verursacht trotz seiner Tiefe von ca. 50 MeV nur eine Bindungsenergie von 2,225 MeV

Wellenfunktion:
- Im Innenraum eine Sinusfunktion
- bei $r = R_0$ Übergang in eine exponentiell abfallende Amplitude
- im Abstand $r = R$ auf $1/e$ abfällt
- R=4,3 fm ist wesentlich größer als die Reichweite der Kernkraft

Einfache quantenmechanische Rechnung zum Deuteron

Relativ langsamer Abfall der Wellenfunktion und damit große räumliche Ausdehnung ist auf die geringe Bindungsenergie des Deuterons zurückzuführen.

Die geringe Bindung bei der großen Potenzialtiefe läßt sich durch die große kinetische Energie der Relativbewegung von Proton und Neutron erklären.

Mit $V_0 - E_B \approx V_0 \approx 50\,\mathrm{MeV}$ ergibt sich ein Impuls zu $p = \hbar k_i \approx 180\,\mathrm{MeV/c}$

daraus ergibt sich eine kinetische Energie für die Relativbewegung von $E_{kin} \approx 33\,\mathrm{MeV}$

Deuteron: Spin und Parität

Der totale Drehimpuls (Kernspin) $\vec{J}$ des Deuterons ist gegeben durch die Kopplung der Spins der Nukleonen ($\vec{s}_n$, $\vec{s}_p$) und dem relativen Bahndrehimpuls $\vec{l}$ zwischen Proton und Neutron:

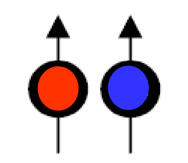
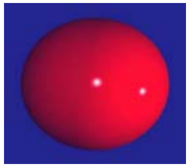
$$\vec{J} = \vec{s}_n + \vec{s}_p + \vec{l}$$

Der gemessene Kernspin des Deuterons ist $J = 1$, $\langle \vec{J}^2 \rangle = J(J+1)\hbar^2$

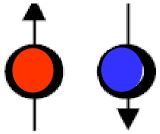
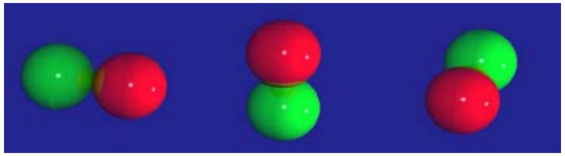
Experiment !

Mögliche Kombinationen der Spins und des Bahndrehimpulses:

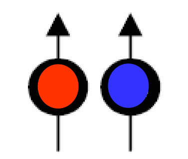
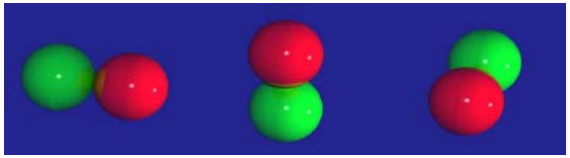
- $\vec{s}_n$ und $\vec{s}_p$ parallel und $l = 0$.

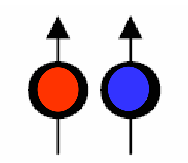
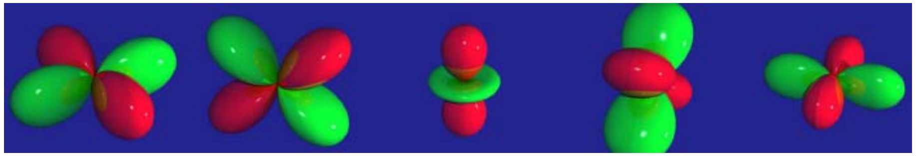
- $\vec{s}_n$ und $\vec{s}_p$ antiparallel und $l = 1$.

- $\vec{s}_n$ und $\vec{s}_p$ parallel und $l = 1$.

- $\vec{s}_n$ und $\vec{s}_p$ parallel und $l = 2$.

Deuteron: Spin und Parität

Parität des Deuterons:

Eigenschaften der emittierten Gammastrahlung beim Neutroneneinfang am Proton ergibt, dass die Parität des Deuterons positiv $(\pi = +1)$ ist.

Experiment !

Aus den Eigenschaften der Kugelfächenfunktionen ergibt sich die Parität zu $(-1)^l = +1$, woraus folgt, dass nur gerade Bahndrehimpulse von $l = 0$ und $l = 2$ vorkommen können.

Das Resultat ist konsistent mit der Annahme, dass $l = 0$ ist.
Höherer Drehimpulswert von $l = 2$ ist jedoch nicht ausgeschlossen.

Deuteron: Magnetisches Moment

Das magnetische Moment des Deuterons, welches sich z.B. durch Kernspin-resonanz (NMR) bestimmen läßt, ergibt sich zu: $\boxed{\mu = 0{,}8574\,\mu_k}$ ***Experiment !***

Bei einer parallelen Ausrichtung der Nukleonenspins und einem angenommenen Bahndrehimpuls von $l = 0$ ergibt die Summe der magnetischen Momente von Proton und Neutron:

$$\vec{\mu}_p + \vec{\mu}_n = \frac{g_{sn}\mu_k}{\hbar}\vec{s}_n + \frac{g_{sp}\mu_k}{\hbar}\vec{s}_p$$

Mit $g_{sn} = -3{,}8261$ und $g_{sp} = 5{,}5857$ und $s_n = s_p = 1/2$ folgt

$$\mu(l = 0) = \mu_p + \mu_n = \tfrac{1}{2}\mu_k(g_{sn} + g_{sp}) = 0{,}8798\,\mu_k$$

Dieser Wert liegt sehr nahe beim experimentellen Ergebnis. Er stimmt aber nicht vollständig mit dem gemessenen Wert des Deuterons überein.

Deuteron: Magnetisches Moment

Erklärung der Abweichung

Beimischung einer d-Komponente ($l = 2$) zu einer s-Wellenfunktion ($l = 0$),

Die Wellenfunktion des Deuterons lautet dann:

$\psi = a_s \psi(l = 0) + a_d \psi(l = 2)$ mit den Mischungsamplituden: a_s und a_d

Magnetisches Moment: $\mu = a_s^2 \mu(l = 0) + a_d^2 \mu(l = 2)$

$\mu(l = 2) = \frac{1}{4}(2 - g_{sn} - g_{sp})$

Das gemessene magnetische Moment ist konsistent mit $a_s^2 = 0{,}96$ und $a_d^2 = 0{,}04$

Die Wellenfunktion des Deuterons besteht aus gemischtem Zustand:

96% aus einem $l = 0$ Zustand und zu 4% aus einem $l = 2$ Zustand.

Das bedeutet aber daß für 4% der Zeit sich der Drehimpuls des Deuterons von $l = 0$ sich zu $l = 2$ verändert.

Dafür müssen die Kernkräfte ein Drehmoment aufbringen das von Radius r und dem Winkel ϑ abhängt.

Wenn die Kernkraft von r und ϑ abhängt, gibt es eine nicht-zentrale Kraftkomponente eine 'Tensorkraft'.

Quadrupolmoment des Deuterons

Das freie Neutron und das freie Proton haben kein elektrisches Quadrupolmoment.

Das Deuteron kann nur aufgrund der Bahnbewegung von Proton und Neutron ein Quadrupolmoment besitzen.

Eine reine $l=0$ Wellenfunktion hat aufgrund ihrer Rotationssymmetrie ein verschwindendes Quadrupolmoment.

Das Deuteron hat ein experimentell bestimmtes Quadrupolmoment von

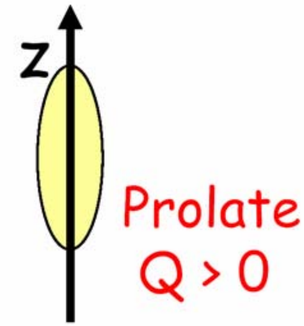
$$Q = 0{,}00282\ eb$$

Experiment !

Der Wert ist mit den Mischungsamplituden von s- und d-Wellenfunktion, die aus dem magnetischen Moment abgeschätzt wurden, konsistent.

Eigenschaften des Deuteron

Bindungsenergie:	$B = 2.23$ MeV
Spin, Parität:	$J^P = 1^+$
Mag. Moment:	$\mu = +0.857\ \mu_N$
Quadrupolmoment:	$Q = +2.82 \times 10^{-31}\ m^2$
Radius:	$R = 2.1$ fm



Deuteron besteht im wesentlichen aus dem $^3S_1$-Zustand:

$^3S_1\ (\ell=0, S=1\ \uparrow\uparrow):\ \mu = \mu_p + \mu_n = 0.88\ \mu_N$

$\cancel{^1S_0\ (\ell=0, S=0\ \uparrow\downarrow):\ \mu = \mu_p - \mu_n = 4.71\ \mu_N}$

Warum gibt es keinen $^1S_0$-Zustand?
Warum existiert das Di-Proton und das Di-Neutron nicht?

Spinabhängigkeit der Kernkraft

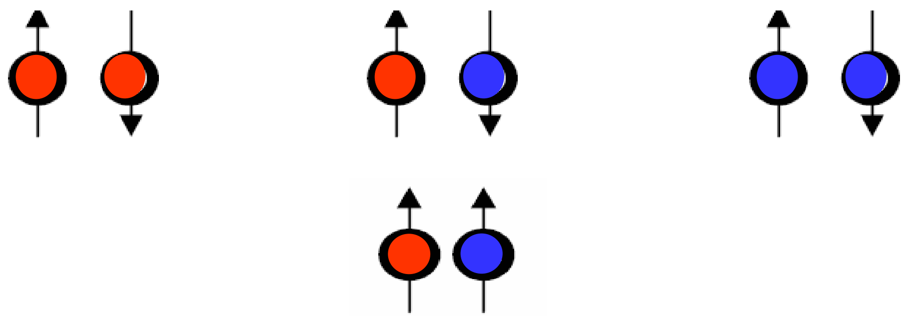
Man erwartet eigentlich, dass die beiden Zustände des Deuterons mit Drehimpulsen J=0 und J=1 mit der gleichen Energie gebunden sind.

Jedoch nur der J=1 Zustand (↑↑) wird beobachtet.

Die Kernkraft ist spinabhängig!

Spin
S=0
Singulett
antisymmetrisch

S=1
Triplett
symmetrisch



Dineutron ***Deuteron*** ***Diproton***

Isospin
T=1
Triplett
Symmetrisch

T=0
Singulett
antisymmetrisch

Es existieren auch keine gebundenen Zustände des Dineutrons oder des Diprotons, diese würden ebenfalls mit antiparallelen Spins (↑↓) wegen des Pauliprinzips zu J=0 koppeln.

Drehimpulserhaltung und Paritätserhaltung erfordern, dass bei einem spinabhängigen Potential der einfachste Term ein Skalar ist: $\sim \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$

Spinabhängigkeit der Kernkraft

Spinabhängige Zentralkraft:
- Kraft muss unabhängig vom Koordinatensystem sein.
- Kraft muss invariant gegenüber der Paritätstransformation sein

Skalar der die Spins der beidenNukleonen enthält.

$$\vec{J} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$$

$$\vec{J}^2 = (\vec{s}_1 + \vec{s}_2)^2$$

$$J(J+1)\hbar^2 = s_1(s_1+1)\hbar^2 + s_2(s_2+1)\hbar^2 + 2\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$$

$$\langle \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \rangle = \frac{1}{2}\left[J(J+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)\right]\hbar^2$$

J=1, $s_1=s_2=1/2$ $\qquad \langle \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$

J=0, $\qquad \langle \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \rangle = -\frac{3\hbar^2}{4}$

Daraus ergibt sich unterschiedliches Potential für Singulett- und Triplettzustand.

Zusammenfassung

Eigenschaften des Deuterons:

- Tiefe des Nukleonenpotenzials
  $V_0 \sim 50$ MeV für Kernradius $R_0 = 1,4$ fm.

- Kernkräfte sind spinabhängig.

- Nicht-zentraler, Tensorterm im zwei Nukleonenpotential

Vorläufiges Kernpotential:

$$V = \underbrace{V_C(r)}_{\text{central}} + \underbrace{V_S(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)}_{\text{spin}} + \underbrace{V_T(\vec{r}, \vec{s})}_{\text{tensor}} + \ldots$$

Deuteron: - nur eine gebundener Zustand, keine angeregten Zustände.
- Nicht genügend Information um Parameter des Potentials zu bestimmen
- Kein Zugang zu l≠0 Zustand.