

Kernmodelle:

- Vibrationsanregungen
- $\gamma$ -Zerfall



# Wiederholung: Deformierte Kerne

## Nilsson Zustände

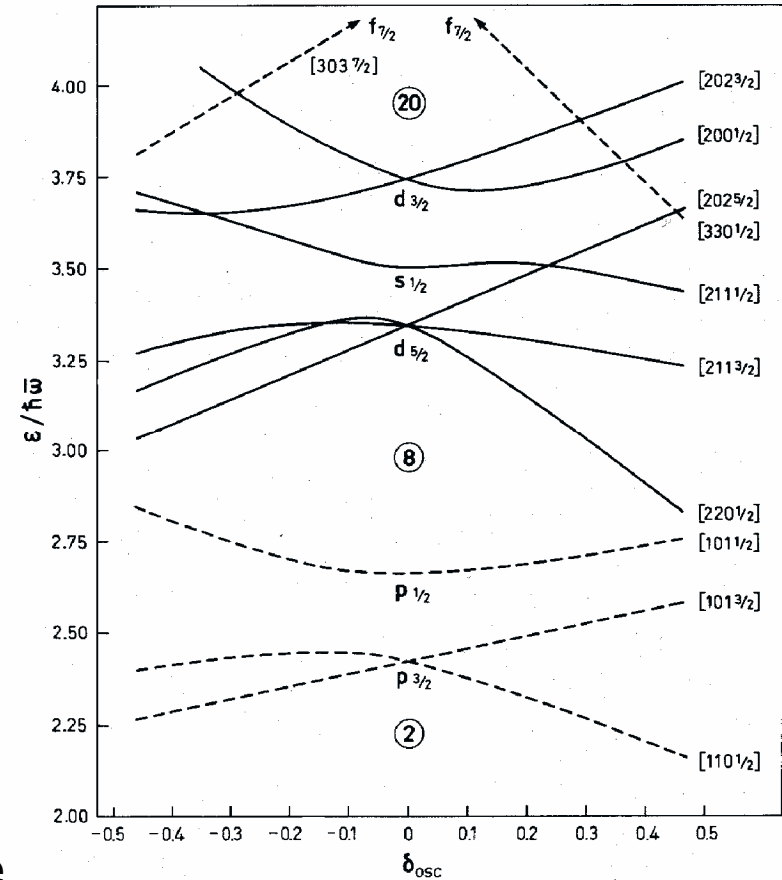
Zur Charakterisierung der Zustände werden die asymptotische Quantenzahlen  $[Nn_z\Lambda \Omega^\pi]$  oder  $\Omega^\pi [Nn_z\Lambda]$  verwendet. (Definition kommt gleich)

Nur für große Deformationen  $\beta_2, \delta$  sind  $[Nn_z\Lambda]$  Konstanten der Bewegung.

Bei großer Deformation, kann man die Bewegung eines Nukleons im deformierten Potential trennen in Komponenten entlang und senkrecht zu der Deformationsachse, die bei axial symmetrischer Deformation als Quantisierungsachse dienen kann.

Die Entartung der Zustände mit bestimmten  $j$ , wird hinsichtlich ihrer Projektion  $m$  auf die Deformationsachse aufgehoben, Zustände mit  $\pm m$  bleiben entartet.

Beispiel:  $j = 5/2$  spaltet in 3 Komponenten auf mit  $|m| = 5/2; 3/2; 1/2$



# Wiederholung: Kollektive Kernanregungen

Die Anregung von Einteilchenzuständen ist auf Kerne in der Nähe abgeschlossener Schalen beschränkt. Bei allen Kernen (außer den sehr leichten) ist die Anregung **kollektiver Freiheitsgrade** möglich.

Kerne mit vielen Nukleonen außerhalb abgeschlossener Schalen zeigen auch kollektive Anregungsspektren.

Kollektive Kernanregungen sind Fluktuationen des Kerns um die Gleichgewichtslage:  
Dichtefluktuationen oder Formfluktuationen

Experimentelle Untersuchung:  
Kollektive Anregungen werden am besten mit Hilfe elektromagnetischer Übergänge untersucht, d.h. mit  **$\gamma$ -Spektroskopie**

Beobachtete kollektive Kernanregungen:

- Rotationszustände deformierter Kerne
- Vibrationszustände
  - Quadrupolschwingungen
  - Oktupolschwingungen
- Riesenresonanzen
  - Dipolriesenresonanz

Analogie in der Molekülphysik:

- Einteilchenanregung
- Vibration
- Rotation

Informationen über den Charakter der Anregung erhält man aus:

- Systematik der Anregungsenergien
- Übergangswahrscheinlichkeiten
- $\gamma$ -Winkelverteilung

# Formschwingungen

Einfachsten Formschwingungen:

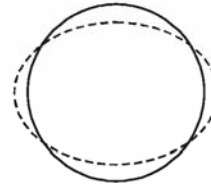
- Quadrupolschwingungen
- Oktupolschwingungen

Beobachtung:

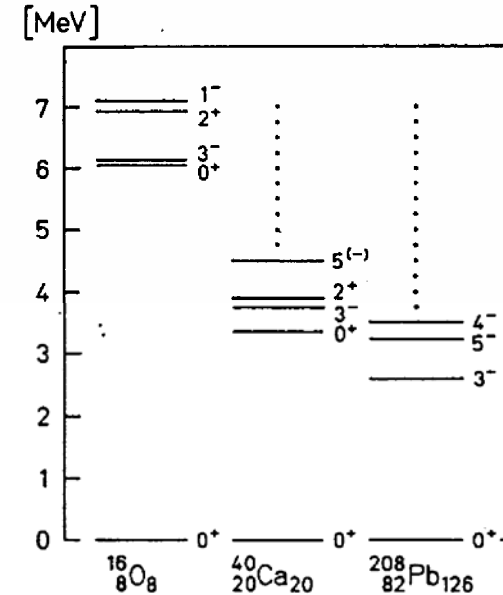
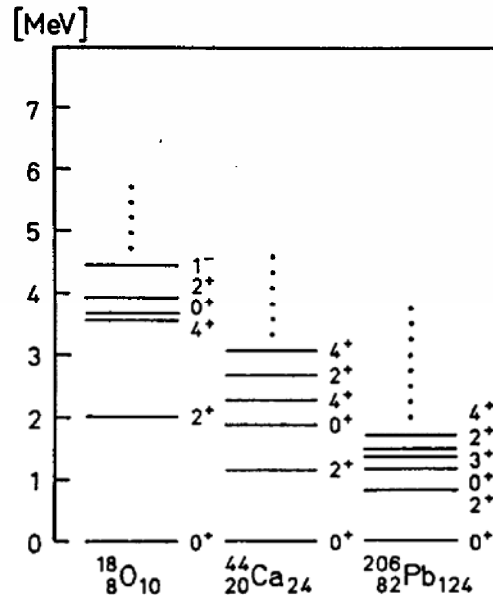
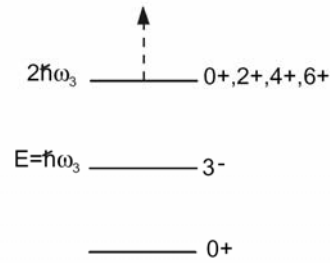
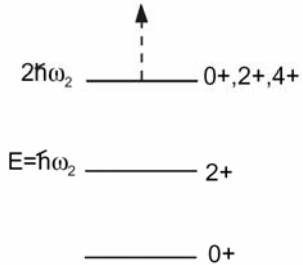
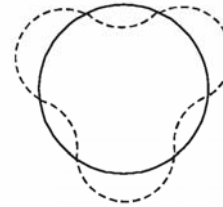
Alle gg-Kerne haben im Grundzustand Spin und Parität  $J^\pi=0^+$  und - bis auf die doppelt magischen Kerne - im ersten angeregten Zustand  $J^\pi=2^+$

Die Übergangswahrscheinlichkeit für diese E2-Anregung zwischen  $0^+$  und  $2^+$  ist um bis zwei Größenordnungen höher als für Einteilchenübergänge.

Quadrupolschwingung



Oktupolschwingung

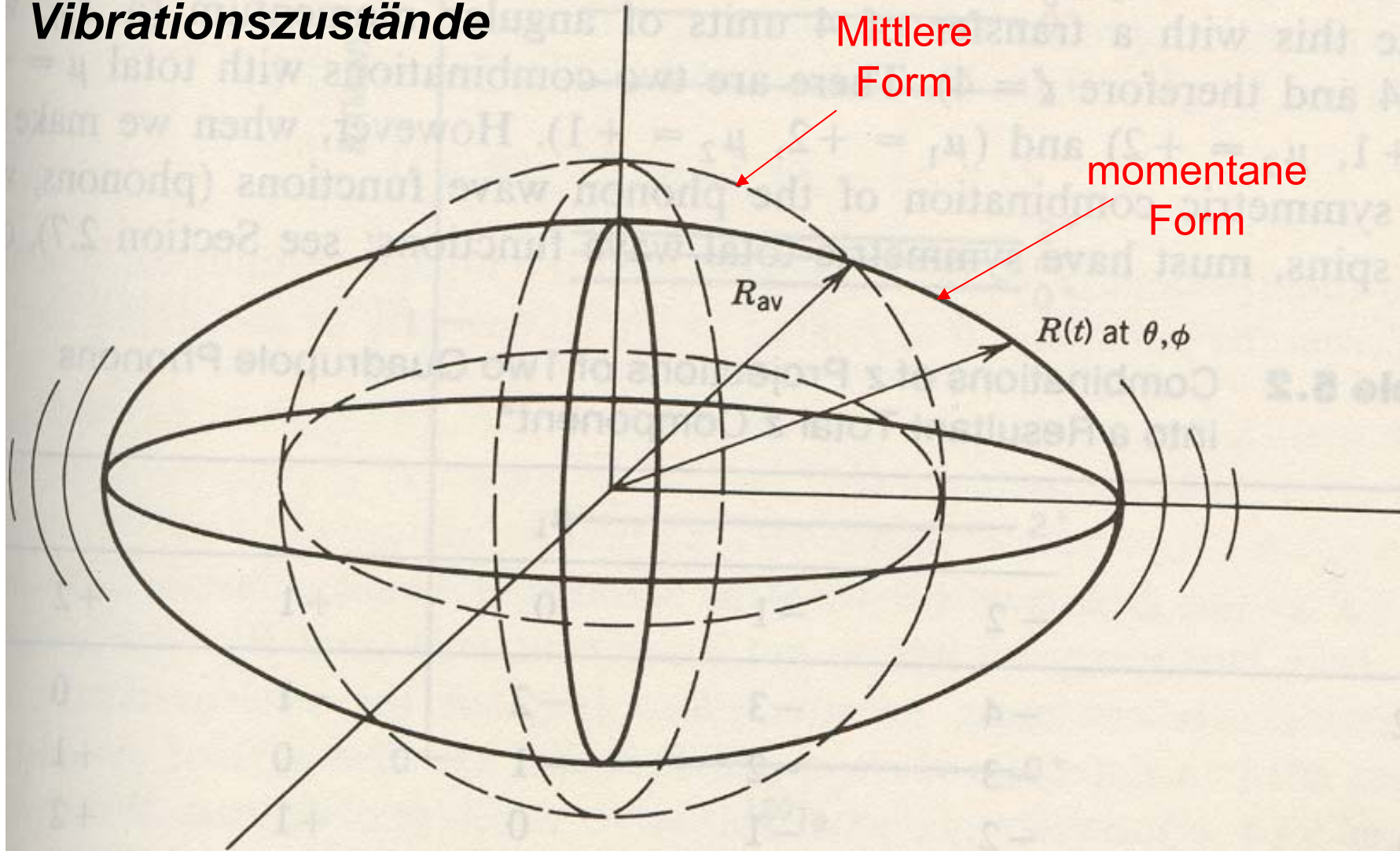


# Kollektive Vibrationsanregung

## Vibrationszustände

Mittlere  
Form

momentane  
Form



# Oberflächenschwingungen

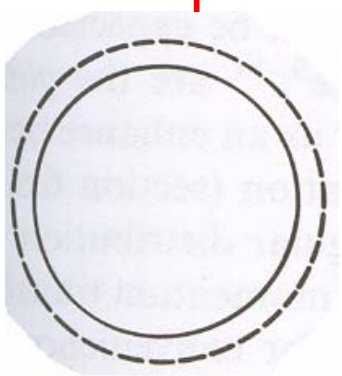
$$R(t) = R_{\text{avr}} + \sum_{\lambda} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi)$$

Instantane Koordinate  $r_0 A^{1/3}$  Amplitude Sphärische Kugeloberflächenfunktionen

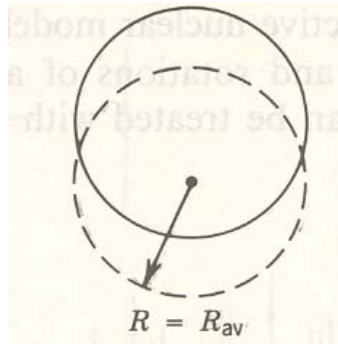
$$\alpha_{\lambda\mu} = \alpha_{\lambda, -\mu}$$

Symmetrie

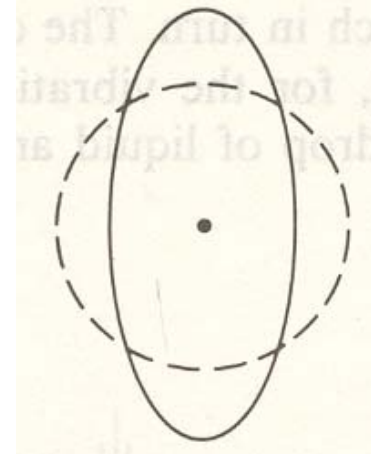
$\lambda = 0$   
Monopol



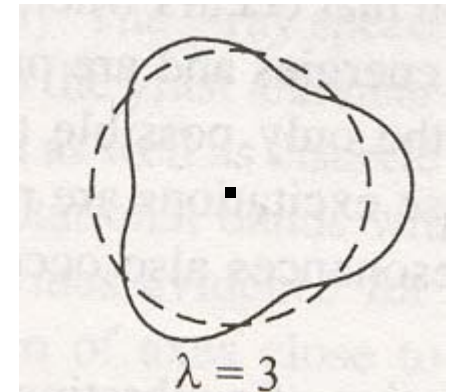
$\lambda = 1$   
Dipol



$\lambda = 2$   
Quadrupol



$\lambda = 3$   
Oktupol



Monopol und Dipol-Anregung benötigen hohe Anregungsenergie.

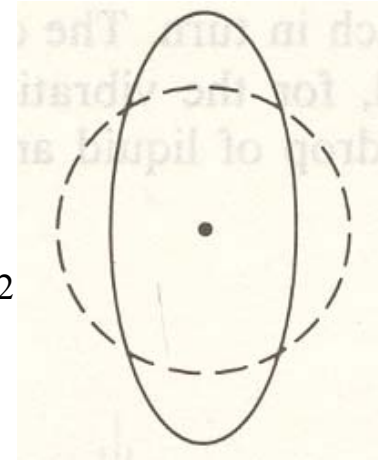
# Oberflächenschwingungen

$$R(t) = R_{\text{avr}} + \sum_{\mu=-2}^2 \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}(\theta, \phi)$$

$$= R_{\text{avr}} + \alpha_{22} Y_{22} + \alpha_{21} Y_{21} + \alpha_{20} Y_{20} + \alpha_{2,-1} Y_{2,-1} + \alpha_{2,-2} Y_{2,-2}$$

$$= R_{\text{avr}} + \alpha_{20} Y_{20}$$

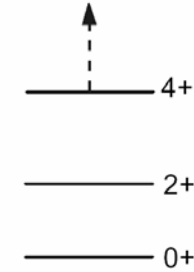
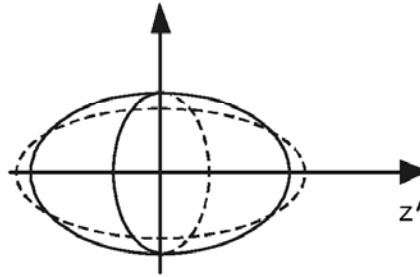
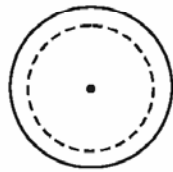
$\lambda = 2$   
Quadrupol



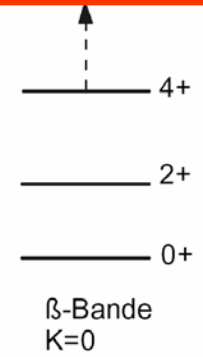
- Quantisierung der Quadrupol-Vibration nennt man **Quadrupol-Phonon**.
- Ein Phonon trägt zwei Einheiten des Drehimpulses.
- Diese Anregungsmode ist dominant.
- Für die meisten gg Kerne existiert ein niedrig liegender Zustand mit  $J^\pi=2^+$ . Entweder von kollektiver Rotation oder Vibration.

# Formschwingungen

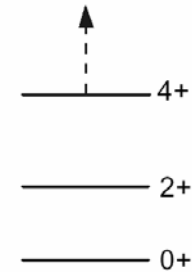
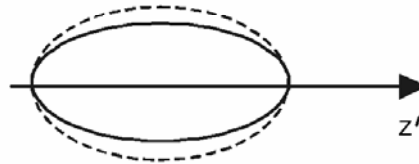
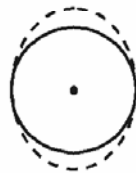
## $\beta$ - Vibration



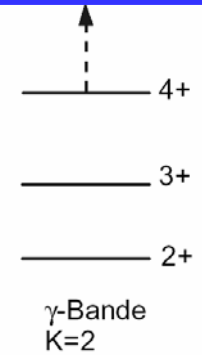
Grundzustands-  
bande



## $\gamma$ - Vibration



Grundzustands-  
bande





# Formschwingungen

## Oktupolschwingungen

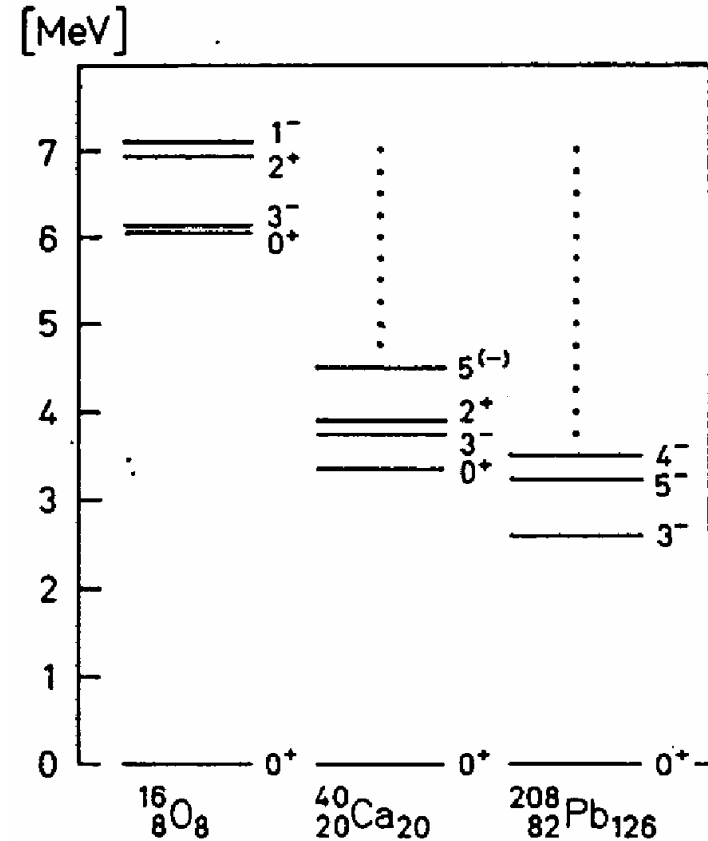
In doppelt magischen Kernen ( $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{208}\text{Pb}$ ) wird niedrig liegender 3<sup>-</sup>-Zustand beobachtet.

Zustände haben um bis zu zwei Größenordnungen höhere Übergangswahrscheinlichkeiten als Einteilchenübergänge.

Die kollektiven 3<sup>-</sup>-Zustände können als Oktupolschwingungen interpretiert werden.

Können als kohärente Überlagerung von Teilchen-Loch-Zuständen zwischen benachbarten Schalen erzeugt werden.

Anders als bei der Dipolriesenresonanz ist hier die Schwingung von Protonen und Neutronen gleichphasig. Dadurch ist die Teilchen-Loch-Wechselwirkung anziehend und die kollektive Oktupolanregung in der Energie nach unten verschoben.



# Elektromagnetische Übergänge

Die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand  $i$  in den Zustand  $f$  ergibt sich nach Fermis Goldener Regel zu:

$$dW = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle \right|^2 \cdot d\rho(E)$$

Der Phasenraumfaktor für die Emission eines Photons mit der Energie  $E_\gamma$  in das Raumwinkelelement  $d\Omega$  ist gegeben:

$$d\rho(E) = \frac{E_\gamma^2 V d\Omega}{(2\pi\hbar c)^3}$$

WW eines geladenen Teilchens mit dem elektromagnetischem Feld

Die Energie eines geladenen Teilchens im EM Feld:

$$A = \left( \phi / c, \vec{A} \right)$$

ist klassisch gegeben durch:

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\phi$$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{m} \vec{p}\vec{A} + e\phi$$

Wechselwirkungsterm:

$$H_{\text{int}} = -\frac{e}{m} \vec{p}\vec{A} + e\phi \equiv \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}$$

mit elektrischem Viererstrom  $\mathbf{j}$  und EM-Feld  $\mathbf{A}$ .

Photonen haben transversale Polarisation  
-> keine Monopolübergänge,  $e\phi$  trägt nicht bei.

# Elektromagnetische Übergänge

Quantenmechanisch: ersetze Impuls

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \quad \vec{A} \equiv \text{Wellenfunktion des Photons}$$

Matrixelement:

$$\langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle = -\frac{ie\hbar}{m} \int d^3r \psi_f^* (\vec{\nabla} \psi_i) \vec{A}$$

Vertauschungsrelation:

$$[\vec{r}, H_0] = \frac{i\hbar}{m} \vec{p} = \frac{\hbar^2}{m} \vec{\nabla}$$

Umformung:

$$\langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle = \frac{ie}{m} (E_i - E_f) \int d^3r \psi_f^* \vec{r} \psi_i \vec{A}$$

*Matrixelement für Multipolstrahlung*

Photon wird durch ebene Welle dargestellt:

$$\vec{A} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega V}} \varepsilon \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

*mit dem Polarisationsvektor  $\varepsilon$   
der Energie  $E_\gamma = \hbar\omega$   
und dem Wellenvektor  $k$*

# Elektromagnetische Übergänge

Für die Übergangswahrscheinlichkeit gilt damit:

$$dW_{fi} = \frac{e^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 \hbar^4 c^3} E_\gamma^3 \left| \vec{\varepsilon} \int d^3r \psi_f^* \vec{r} e^{i\vec{k}\vec{r}} \psi_i \right|^2 d\Omega$$

mit  $E_\gamma \sim \text{MeV}$  ist  $\lambda_\gamma \gg R_{\text{Kern}}$  und

man entwickelt  $\exp(i\vec{k}\vec{r})$  nach **Multipolen**:

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} = 1 + i\vec{k}\vec{r} + \dots$$

Elektrische Dipolübergänge (E1)

Aus  $e^{i\vec{k}\vec{r}}=1$  folgt die Dipolübergangswahrscheinlichkeit z.B. für  $\gamma$ -Zerfälle bei Einteilchenanregung oder kollektiven Anregungen.

$$W_{fi}^{(E1)} = \frac{1}{\tau} = \lambda(E1) = \frac{e^2}{3\pi\varepsilon_0 \hbar^4 c^3} E_\gamma^3 \left| \int d^3r \psi_f^* \vec{r} \psi_i \right|^2$$

$$W_{fi}^{(E1)} \propto E_\gamma^3$$

# Höhere Multipole Übergangsmatrixelement

Abschätzung mit "einfachen" Näherungen für Übergang zwischen zwei Protonen-Einteilcheniveaus:

$$\psi_i = R_{n'l'}(r)\varphi_{j'l'm'}(\theta, \phi) \quad \text{Annahme: } R_{n'l'}(r) \sim \text{konstant}$$

$$\psi_f = R_{n''l''}(r)\varphi_{j''l''m''}(\theta, \phi) \quad \text{für } 0 \leq r \leq R$$

Allgemein gilt:

Mittelung über Anfangszustände  $m'$

Summierung über die Endzustände  $m''$ .

$$R = R_0 A^{1/3}$$

$$\lambda^E(\ell, m) = \frac{8\pi(\ell+1)}{\hbar\ell(2\ell+1)!!} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\ell+1} \left(\frac{3}{\ell+3}\right)^2 cR^{2\ell}$$

$$\lambda^M(\ell, m) = \frac{8\pi(\ell+1)}{\hbar\ell(2\ell+1)!!} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \left(\mu_p - \frac{1}{\ell+1}\right)^2 \left(\frac{\hbar}{m_p c}\right) \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\ell+1} \left(\frac{3}{\ell+2}\right)^2 cR^{2\ell-2}$$

# Übergangswahrscheinlichkeit für $\gamma$ -Zerfälle

*Resultate für Einteilchen-Proton-Übergänge:*

$$\lambda^E(\ell=1) = 1.0 \times 10^{14} A^{2/3} E^3$$

$$\lambda^M(\ell=1) = 5.6 \times 10^{13} E^3$$

$$\lambda^E(\ell=2) = 7.3 \times 10^7 A^{4/3} E^5$$

$$\lambda^M(\ell=2) = 3.5 \times 10^7 A^{2/3} E^5$$

$$\lambda^E(\ell=3) = 34 A^2 E^7$$

$$\lambda^M(\ell=3) = 16 A^{4/3} E^7$$

$$\lambda^E(\ell=4) = 1.1 \times 10^{-5} A^{8/3} E^9$$

$$\lambda^M(\ell=4) = 4.5 \times 10^{-6} A^2 E^9$$

*Wichtige Verhältnisse:*

$$\frac{\lambda(\ell+1)}{\lambda(\ell)} \approx 10^{-5}$$

$$\frac{\lambda^E(\ell)}{\lambda^M(\ell)} \approx 10^2$$

*Multipolstrahlung besitzt Drehimpuls  $l$  und definierte Parität:*

$$\pi_\ell = (-1)^{(\ell)} \quad \text{Elektrische Multipolstrahlung}$$

$$\pi_\ell = (-1)^{(\ell+1)} \quad \text{Magnetische Multipolstrahlung}$$

# Auswahlregeln für $\gamma$ -Übergänge

Für die E-M Wechselwirkung  
gelten die Erhaltungsgrößen:

- Energie
- Impuls
- Drehimpuls
- Parität

$$E, \vec{p}, \vec{L}, \pi$$

Betrachte den Übergang:

$$I_i \rightarrow I_f + L\gamma$$

Auswahlregeln

$$\text{Drehimpuls} \quad |I_i - I_f| \leq L\gamma \leq I_i + I_f \quad m = m_i - m_f$$

$$\text{Parität} \quad \pi_i = \pi_f \cdot \pi_\gamma$$

Beispiele:  $I_i = 3^+ \quad I_f = 2^-$

~~$I_i = 0^+ \rightarrow I_f = 0^+ + L\gamma$~~