Kernmodelle:

- Fermigas-Modell
- Neutronenstern

Fermigas-Modell

• *Kerne im Grundzustand können als entartetes Fermigassysteme aus Nukleonen, mit hoher Dichte (0,17 Nukleonen/fm^3) betrachtet werden.*

• *Die Kerndichte ist bestimmt durch den repulsiven Anteil der Wechselwirkung ("hardcore“) und die Reichweite der N-N Wechselwirkung.*

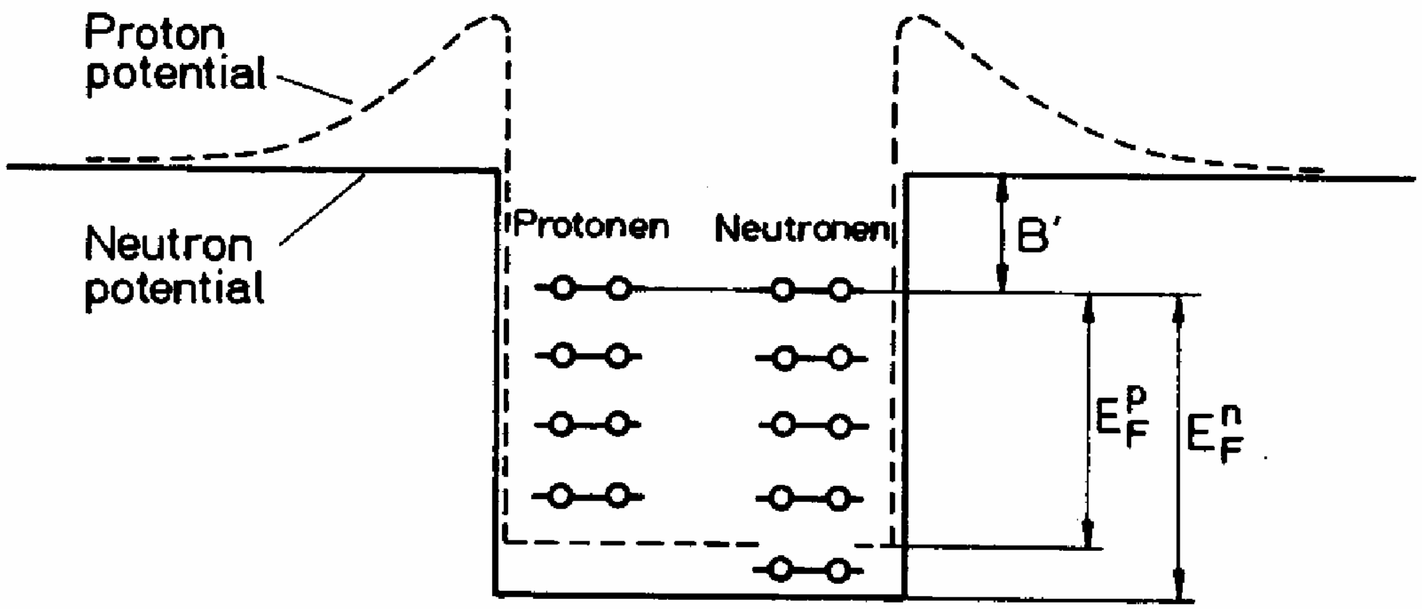
• *Analog zum Fermigas-Modell für Leitungselektronen wird angenommen, daß die Nukleonen (J = 1/2, Fermion) im Kern unter dem Einfluß eines Potentials sich frei bewegen.*

• *Das Potential ergibt sich aus der Superposition der Potentiale aller Nukleonen, die als punktförmig angenommen werden. Als Potential wird ein Topf angenommen mit konstantem Wert im Kerninneren und scharf begrenzt am Rand.*

• *Große Beweglichkeit der Nukleonen im Kern war schon Ergebnis der ‚schwachen Bindung‘ zwischen Nukleonen im Falle des Deuterons.*

Fermigas-Modell

Zustände im Fermigas-Modell



- *Kern stellt für Konstituenten einen Potentialtopf dar, mit relativ leichter Bindung*
- *Entartetes Fermigas mit zwei unabhängigen Teilchensorten (p, n)*
- *Spin-1/2 –Teilchen: Fermi-Dirac-Statistik, Pauli-Prinzip*
- *Nukleonen bewegen sich frei in einer Kugel mit Radius* $R = R_0 A^{1/3}$
- *Wegen Unabhängigkeit der Protonen und Neutronen zwei getrennte Potentialtöpfe*
- *Töpfe unterscheiden sich in der Coulombenergie für Protonen*
- *Potential ist im Kernvolumen konstant und besitzt scharfe Ränder*
- *Für große Abstände gleichen sich beide Töpfe an, besitzen gleiche Nulllinie.*

Fermigas-Modell

Zustandsdichte für freies Teilchen

Zahl der Zustände in Impulsintervall $[p, p+dp]$

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \cdot V$$ mit V = von Nukleonen besetztem Volumen

Gesamtzahl der Zustände (T = 0) von p = 0 bis p = p_F

$$n = \frac{V \cdot p_F^{\ 3}}{6\pi^2\hbar^3}$$ mit p_F = Fermi – Impuls

Fermi – Impuls und Fermi – Energie

Zahl der Protonen (Z)- und Neutronen (N), Annahme: $Z \approx N \approx A/2$

Mit $J = 1/2$ ist jeder Fermigaszustand mit 2p/2n besetzt.

$$Z = \frac{V \cdot \left(p_F^p\right)^3}{3\pi^2\hbar^3} \quad \text{und} \quad N = \frac{V \cdot \left(p_F^n\right)^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

mit $p_F^{p/n}$ = Fermiimpuls für Proton bzw. Neutron

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 A \qquad \text{mit } R = R_0 A^{1/3}, R_0 = 1.21\,\text{fm}$$

$$\left(p_F^n\right)^3 = \frac{3\pi^2\hbar^3}{V}\frac{A}{2} = \frac{3\pi^2\hbar^3}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} \cdot \frac{A}{2} = \frac{9\pi\ \hbar^3}{8R_0^3} \quad \Rightarrow \quad p_F \cong p_F^p \cong p_F^n = \frac{\hbar}{R_0}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3}$$

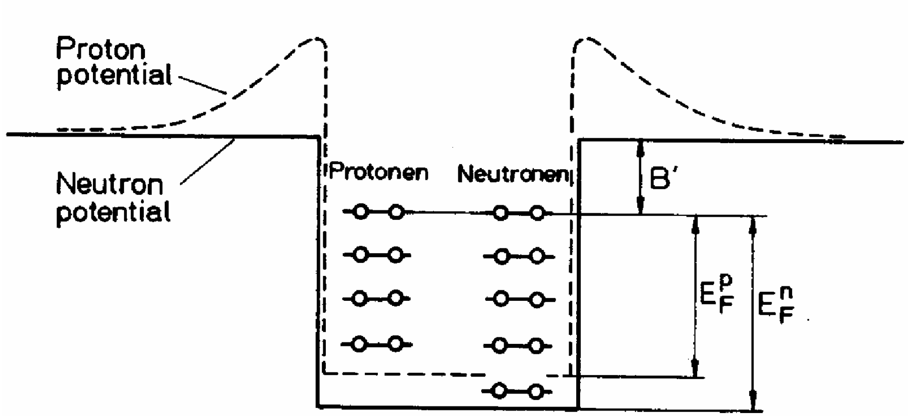
Fermigas-Modell

Fermiimpuls: $p_F = \frac{\hbar}{R_0}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \approx 250$ MeV/c für $Z = N = \frac{A}{2}$

Fermienergie: $E_F = \frac{p_F^2}{2M} \approx 33$ MeV

mit Bindungsenergie: $B' \approx 7\text{-}8$ MeV

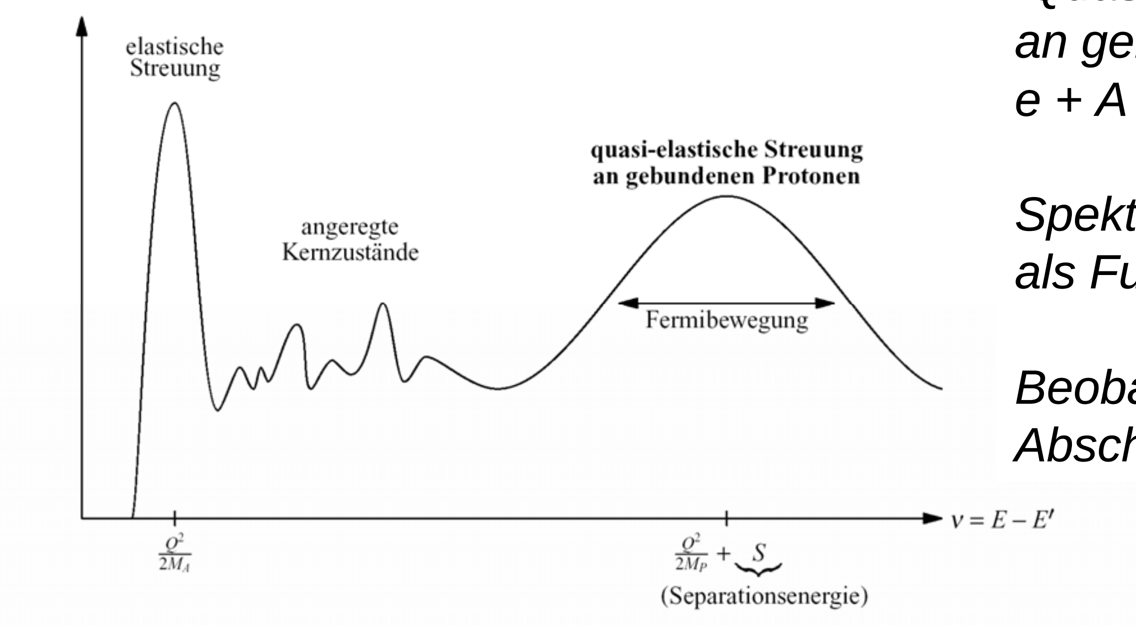
Potentialtiefe: $V_0 = E_F + B' \approx 40$ MeV



Quasi-elastische Elektronenstreuung an gebundenen Protonen im Kern
$e + A \rightarrow e + p + (A\text{-}1)$ Reaktionen

Spektrum der gestreuten Elektronen als Funktion der übertragenen Energie

Beobachtete Impulse entsprechen Abschätzung aus Fermigasmodell



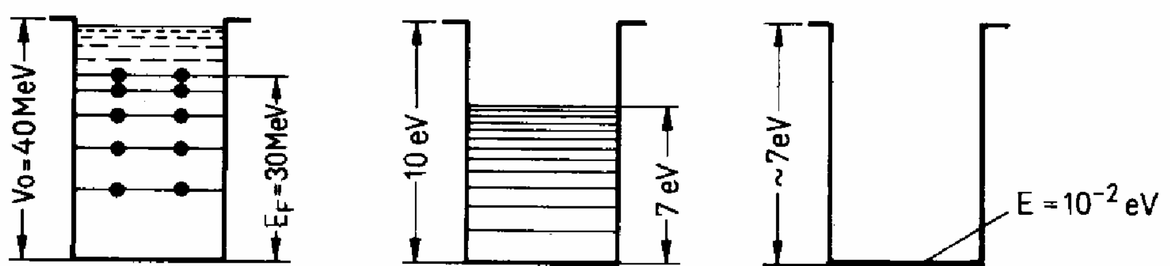
Fermigas-Modell

Fermi-Impuls: $p_F \cong p_F^p \cong p_F^n = \dfrac{\hbar}{R_0}\left(\dfrac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \approx 250\ \text{MeV/c}$ für $Z = N = \dfrac{A}{2}$

Fermi-Energie: $E_F = \dfrac{p_F^2}{2M} \approx 33\ \text{MeV}$

Potentialtopf: $V_0 = E_F + B' \approx 40\ \text{MeV}$

Die kinetische Energie des Nukleonengases ist wegen der geringen Bindungsenergie B' etwa gleich der Potientialtiefe analog zum freien Elektronengas in Metall.



Kern *Kupfer* *N_2 (fest)*

Neutronenüberschuß stabiler Kerne:

E_F^n und E_F^p liegen auf gleichem Niveau $V_0^p < V_0^n$, wegen Coulombpotential $V_c = (Z\text{-}1)\alpha\hbar c/R$ werden mehr Neutronen $N > Z$ in schweren stabilen Kernen gebunden.

Fermigas-Modell

Kinetische Energie im Fermigas-Modell

Mittlere kinetische Energie pro Nukleon

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E_{kin} p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{\int_0^{p_F} p^4 dp}{2M \int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5} \cdot \frac{p_F^2}{2M} \approx 20 MeV$$

Gesamte kinetische Energie eines Kerns A (N,Z)

$$E_{kin}(N,Z) = N \langle E_n \rangle + Z \langle E_p \rangle = \frac{3}{10M} \left(N (p_F^n)^2 + Z (p_F^p)^2 \right)$$

$$E_{kin}(N,Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \cdot \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}}$$

Bsp kurze Nebenrechnung für Neutronen

$$N \cdot p_F^2 = \frac{V}{3\pi^2 \hbar^3} \cdot p_F^5 = \frac{4\pi R_0^3 A}{9\pi^2 \hbar^3} \cdot p_F^5 = \frac{4\pi \cdot R_0^3 \cdot A \cdot (9\pi)^{5/3} \hbar^5}{9\pi^2 \hbar^3 8^{5/3} R_0^5}$$

$$= \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{A}{2^{5/3}} = \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{A^{5/3}}{A^{2/3} 2^{5/3}} = \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{N^{5/3}}{A^{2/3}}$$

Fermigas-Modell

Gesamte kinetische Energie eines Kerns A (N,Z)

$$E_{kin}(N,Z) = \frac{3}{10M}\frac{\hbar^2}{R_0^2}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \cdot \frac{N^{5/3}+Z^{5/3}}{A^{2/3}}$$

Mit Isospin: $\mathrm{T_z} = 1/2\left(Z-N\right)$

$$N = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}Z = \frac{1}{2}(N+Z) - \frac{1}{2}(Z-N) = \frac{A}{2} - \mathrm{T_z}$$

$$Z = \frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N = \frac{1}{2}(N+Z) - \frac{1}{2}(N-Z) = \frac{A}{2} + \mathrm{T_z}$$

$$E = \frac{3}{10M}\frac{\hbar^2}{R_0^2}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \cdot \frac{1}{A^{2/3}}\left(\left(\frac{A}{2}-\mathrm{T_z}\right)^{\frac{5}{3}} + \left(\frac{A}{2}+\mathrm{T_z}\right)^{\frac{5}{3}}\right)$$

Entwickelt man diesen Ausdruck wie

$$(1\pm \mathrm{x})^p \approx 1 \pm px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 \pm ... \qquad \text{Konvergenz: } |\mathrm{x}| \le 1$$

$$\left(\frac{A}{2}-\mathrm{T_z}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\left(1-\frac{2\mathrm{T_z}}{A}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\left(1-\frac{5}{3}\frac{2\mathrm{T_z}}{A} + \frac{10}{18}\left(\frac{2\mathrm{T_z}}{A}\right)^2 - ...\right)$$

$$\left(\frac{A}{2}+\mathrm{T_z}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\left(1+\frac{2\mathrm{T_z}}{A}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\left(1+\frac{5}{3}\frac{2\mathrm{T_z}}{A} + \frac{10}{18}\left(\frac{2\mathrm{T_z}}{A}\right)^2 - ...\right)$$

Fermigas-Modell

so erhält man:

$$E_{kin}(N,Z) = \frac{3}{10M}\frac{\hbar^2}{R_0^2}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3}\cdot\left(A + \frac{5}{9}\cdot\frac{(N-Z)^2}{A} + \ldots\right)$$

Vergleich mit Weizsäcker Massenformel oder Tröpfchenmodell:

$$BE(A,Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(Z-A/2)^2}{A} \pm \delta$$

Erste Term ~A trägt zum Volumenterm in der Massenformel bei.

Zweiter Term ~ $\frac{(N-Z)^2}{A}$ *ist für den Asymmetrieterm verantwortlich.*

Bemerkung :

$$(\mathrm{N}\text{-}\mathrm{Z})^2 = 4\left(\frac{1}{2}(Z-N)\right)^2 = 4\mathrm{T}_z^{\,2} = 4\left(\frac{A}{2} + \mathrm{T}_z - \frac{A}{2}\right)^2 = 4\left(Z - \frac{A}{2}\right)^2$$

Fermigas-Modell und Neutronenstern

Der Druck eines Fermionen-Gases beruht auf dem Pauli-Prinzip, das die Besetzung desselben Zustands mit mehr als einem Teilchen verbietet, also auch das zwei Teilchen sich am selben Ort aufhalten. Es kommt zu einer effektiven Abstoßung der Teilchen im Raum. Diese ist umgekehrt proportional zur Masse m der Teilchen: ***je leichter die Teilchen eines Fermionen-Gases sind, desto größer ist ihr Druck.***

Den größten Druck würden also Neutrinos erzeugen, allerdings ist deren Wechselwirkung mit anderer Materie infolge ihrer elektrischen Neutralität unter thermischen Bedingungen sehr gering.

Gegenüber einem Gas aus Protonen oder aus Neutronen besitzt ein Elektronengas einen deutlich höheren Druck.

Erinnerung Thermodynamik

Energie des Fermigases:

$$U = V\frac{8\pi}{h^3}\int_0^{p_F}\frac{p^4}{2m}dp$$

Druck des entarteten Fermigases :

$$P = -dU/dV$$

Druck als Funktion der Dichte:

$$P = \frac{2}{3}U/V = \frac{h^2}{20m}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\rho^{5/3}$$

Anwendung: Fermigas-Modell und Neutronenstern

Sternentwicklung.
Sterne mit hinreichend großer Masse entwickeln unter der Wirkung ihrer Gravitation in ihrem Inneren so hohe Drucke, daß dort ein Plasma aus Elektronen und ionisierten Kernen bzw. Protonen entsteht.

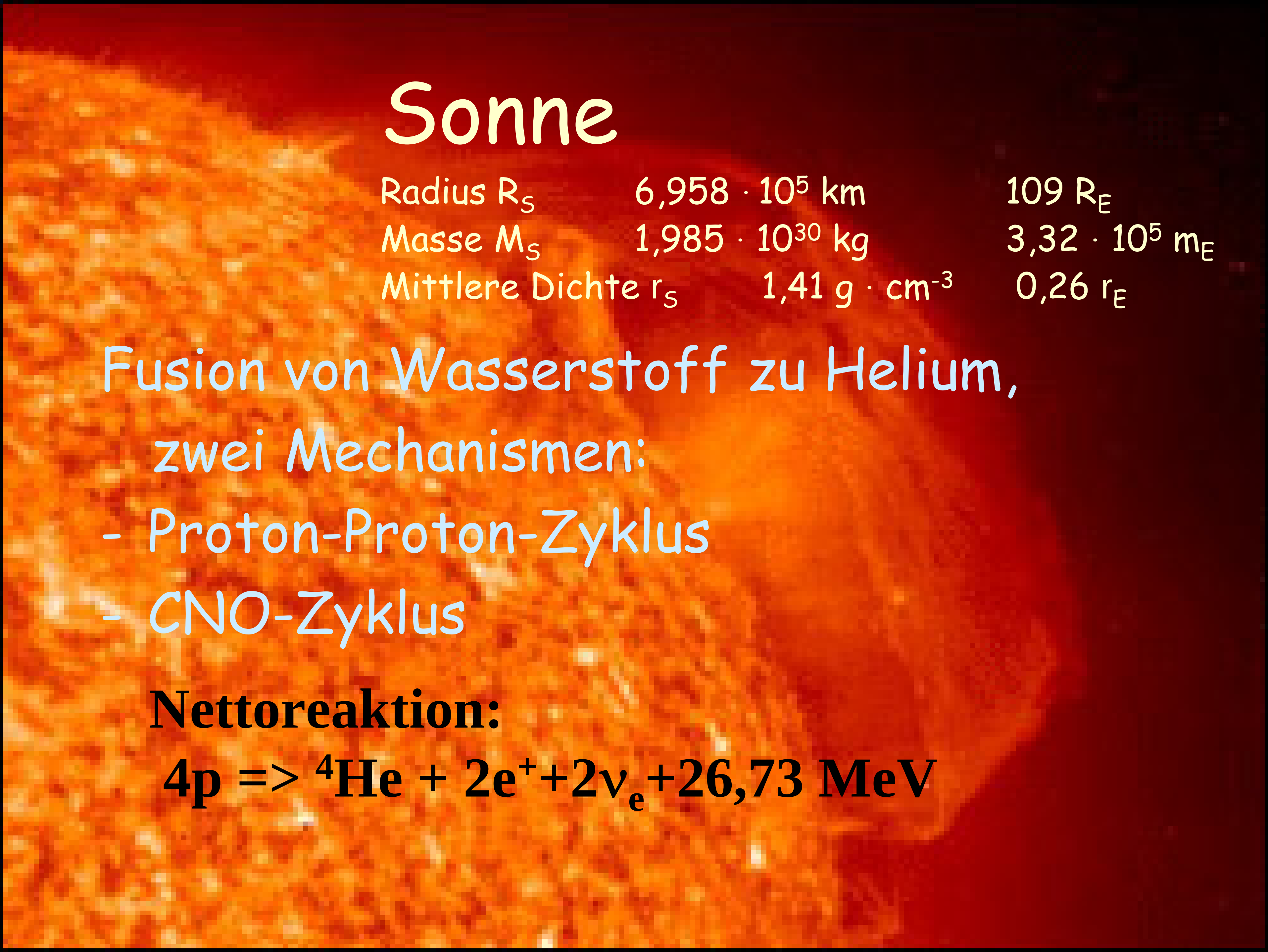
Wo gibt es diese Umgebung? Einschub: Sonne

Der Gegendruck gegen die Gravitation wird dann überwiegend von den Teilchen mit der kleinsten Masse, also von den Elektronen geliefert.

Ausgebranntes Zentrum der Sterne besteht vorwiegend aus Eisen.
Masse typischerweise von 1-2 Sonnenmassen.
durch die hohe Dichte steigt die Fermi-Energie der Elektronen

Bei weiter zunehmendem Gravitationsdruck kann nun das System ausweichen, indem es im inversen β-Zerfall: $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ *aus je einem Elektron und einem Proton ein Neutron erzeugt und dabei seinen Gegendruck auf 1/1800 erniedrigt.*
Es entsteht ein Neutronenstern.

Die Umkehrreaktion der Beta-Zerfall $n \rightarrow p + e^- + \nu_{e\ anti}$ *wird durch das Pauli-Prinzip für die Elektronen verboten (keine freien Elektronenniveaus wg hoher Dichte).*



Sonne

Radius R_S	$6{,}958 \cdot 10^5$ km	$109\ R_E$
Masse M_S	$1{,}985 \cdot 10^{30}$ kg	$3{,}32 \cdot 10^5\ m_E$
Mittlere Dichte r_S	$1{,}41$ g $\cdot$ cm^{-3}	$0{,}26\ r_E$

Fusion von Wasserstoff zu Helium, zwei Mechanismen:

- Proton-Proton-Zyklus
- CNO-Zyklus

Nettoreaktion:

$$4p \Rightarrow {}^4He + 2e^+ + 2\nu_e + 26{,}73\ MeV$$

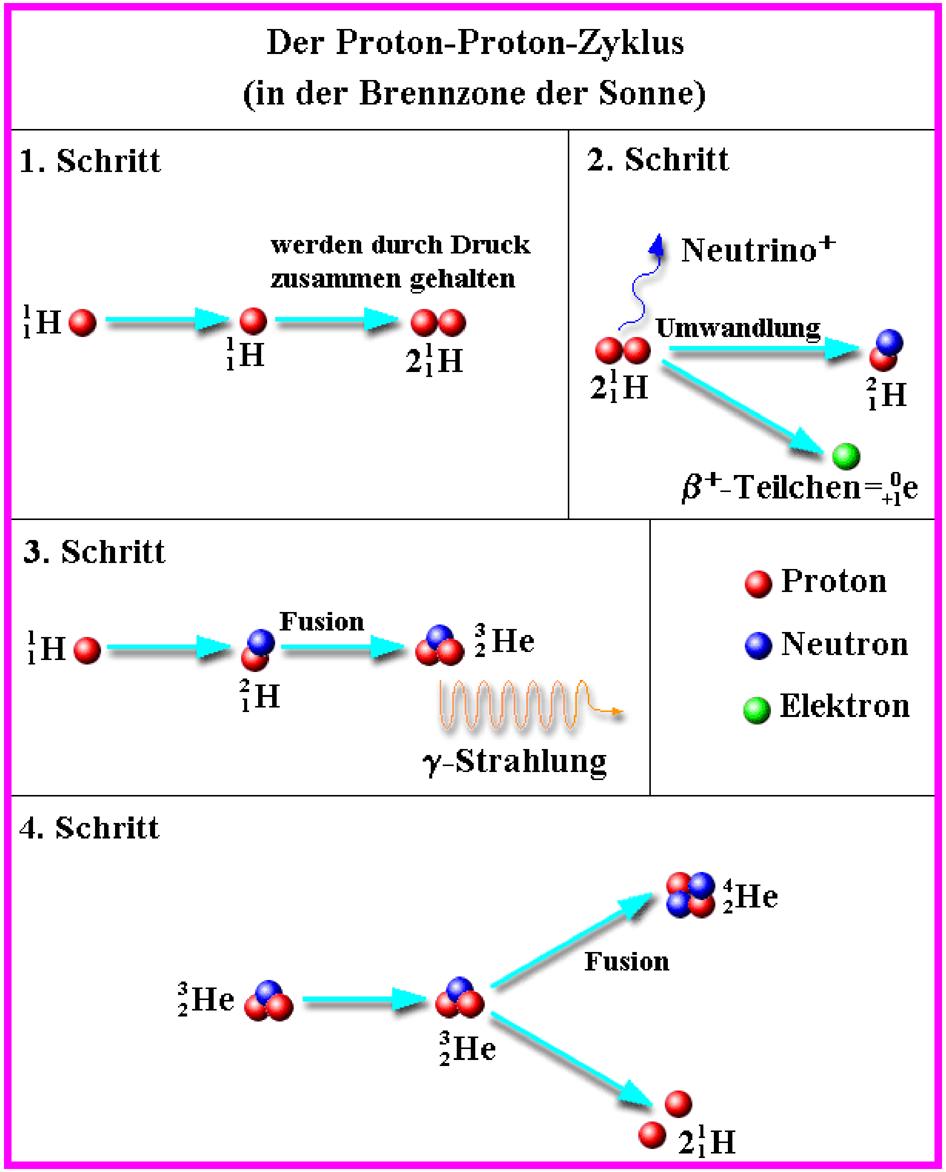
Zwischenspiel-Astrophysik

pp-Zyklus

$$p + p \rightarrow d + e^{+} + \nu_e + 1{,}19\ MeV$$

$$d + p \rightarrow {}^{3}_{2}He + \gamma + 5{,}49\ MeV$$

$${}^{3}_{2}He + {}^{3}_{2}He \rightarrow {}^{4}_{2}He + 2p + 12{,}86\ MeV$$



Bilanzgleichung:

$$4p \rightarrow {}^{4}_{2}He + 2e^{+} + 2\nu_e + 26{,}2\ MeV$$

Proton-Proton-Zyklus

$p+p \Rightarrow {}^2H+e^+ + \nu_e$ *(99%)*

$p+e^-+p \Rightarrow {}^2H+ \nu_e$ *(1%)*

${}^2H+p \Rightarrow {}^3He+\gamma$

${}^3He+{}^3He \Rightarrow {}^4He+2p$ *(86%)*

${}^3He+{}^4He \Rightarrow {}^7Be+\gamma$ *(14%)*

${}^3He+p \Rightarrow {}^4He+\nu_e+e^+$ *(<<1%)*

${}^7Be + p \Rightarrow {}^8B + \gamma$

${}^8B \Rightarrow {}^8Be + e^+ + \nu_e$

${}^8Be \Rightarrow 2\,{}^4He$ *(1%)*

${}^7Be + e^- \Rightarrow {}^7Li + \nu_e$

${}^7Li + p \Rightarrow 2\,{}^4He$ *(99%)*

Zwischenspiel-Astrophysik

Generelle Aspekte: nukleare Reaktionen in der Astrophysik

Energie: Reaktion $1+2 \rightarrow 3+4$ Q_{12}-value > 0

Reaktions-Rate: $\langle\sigma v\rangle_{12} \propto \int_0^\infty \sigma(E)\, E \exp(-E/kT)\, dE$

- Maxwell-Boltzmann Verteilung der Relativgeschwindigkeit
- Energie ist gegeben durch Temperatur T
- Energieabhängige Wirkungsquerschnitte

Astrophysikalische Umgebungen

$T \sim 15\text{x}10^6$ K z.B. unsere Sonne $kT \sim 1$ keV

....

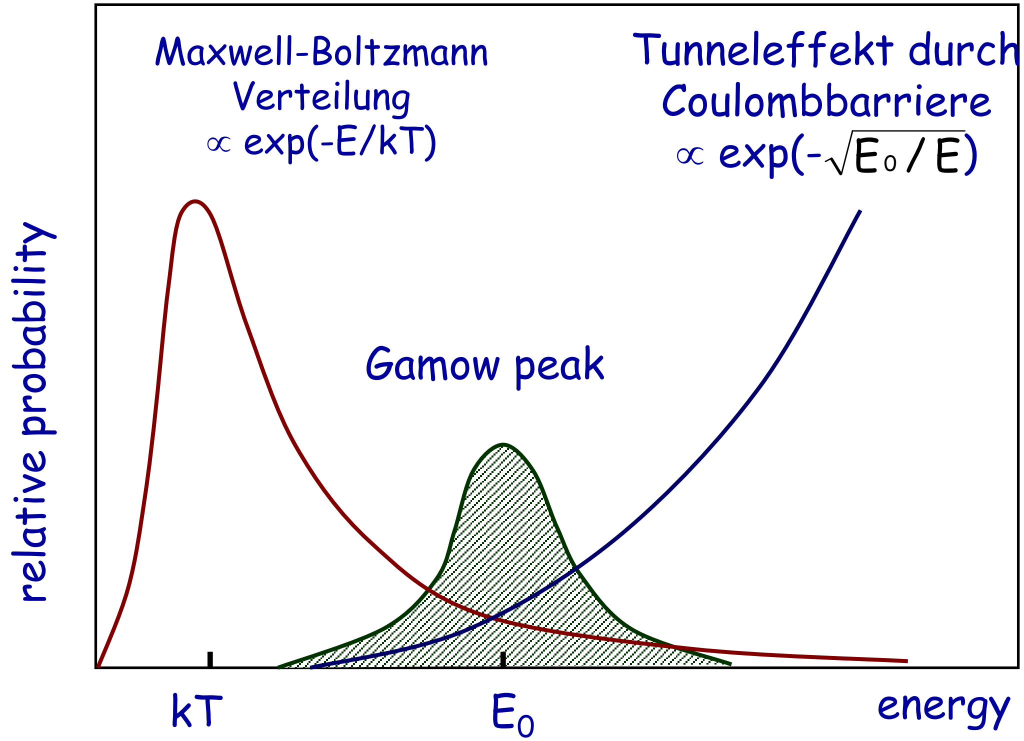
$T \sim 10^{10}$ K Big Bang $\Rightarrow$ $kT \sim 2$ MeV

Zwischenspiel-Astrophysik

Geladene Teilchen induzieren Reaktionen

$\Rightarrow$ klassisch verboten wegen Coulombpotential E_c ~ MeV !

Nukleare Reaktionen in Sternen werden durch den quantenmechanischen TUNNEL-EFFEKT bestimmt!



<u>Gamow peak:</u>

entscheidender Energiebereich für thermonukleare Reaktionen

$kT \ll E_0 \ll E_{coul}$ ➡ 10^{-18} barn < σ < 10^{-3} barn

z.T. extrem kleine Wirkungsquerschnitte

Wasserstoffbrennen

ppII-/ppIII-Prozeß

$$ {}_2^3He + {}_2^4He \rightarrow {}_4^7Be + \gamma + 1{,}59\ MeV $$

ppII-Reaktion

$$ {}_4^7Be + e^- \rightarrow {}_3^7Li + \nu_e + 0{,}86\ MeV $$

$$ {}_3^7Li + p \rightarrow {}_2^4He + {}_2^4He + 17{,}35\ MeV $$

ppIII-Reaktion

$$ {}_4^7Be + p \rightarrow {}_5^8B + \gamma + 0{,}14\ MeV $$

$$ {}_5^8B \rightarrow {}_4^8Be^* + e + \nu_e + 14{,}02\ MeV $$

$$ {}_4^8Be^* \rightarrow {}_2^4He + {}_2^4He + 3{,}03\ MeV $$

CNO-Zyklus

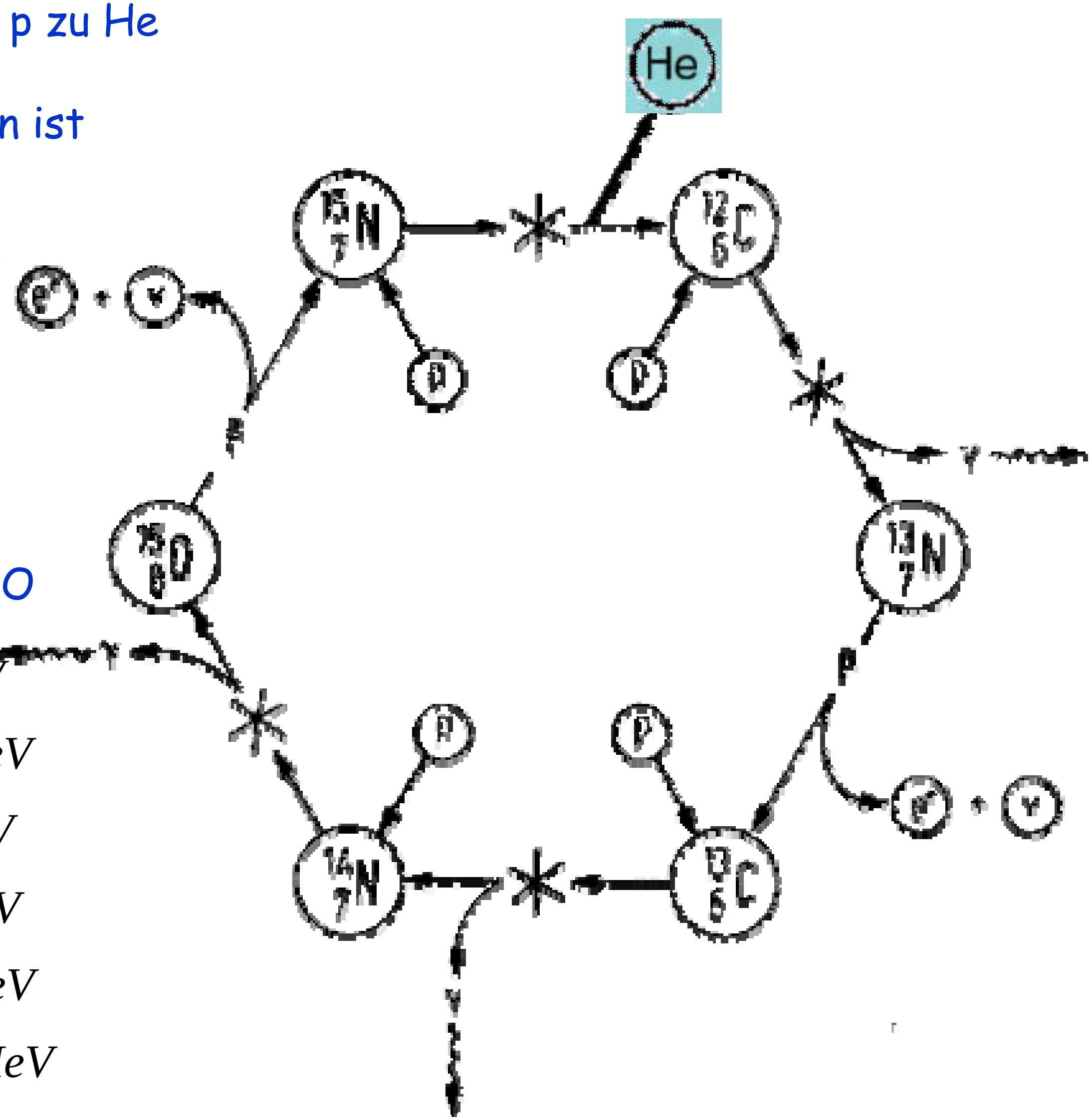
- Katalytische Erzeugung von 4 p zu He

- Solange C,N oder O vorhanden ist
pp- und CNO Zyklus möglich.

- Reaktionen sind T abhängig,
Verhältnis ändert sich damit

- In Sonne 98.5% pp-Ketten,
Später CNO (Roter Riese)

- In massereichen Sternen CNO



$$^{12}_{6}C + p \rightarrow {}^{13}_{7}N + \gamma + 1{,}94\ MeV$$

$$^{13}_{7}N \rightarrow {}^{13}_{6}C + e^{+} + \nu_e + 1{,}51\ MeV$$

$$^{13}_{6}C + p \rightarrow {}^{14}_{7}N + \gamma + 7{,}54\ MeV$$

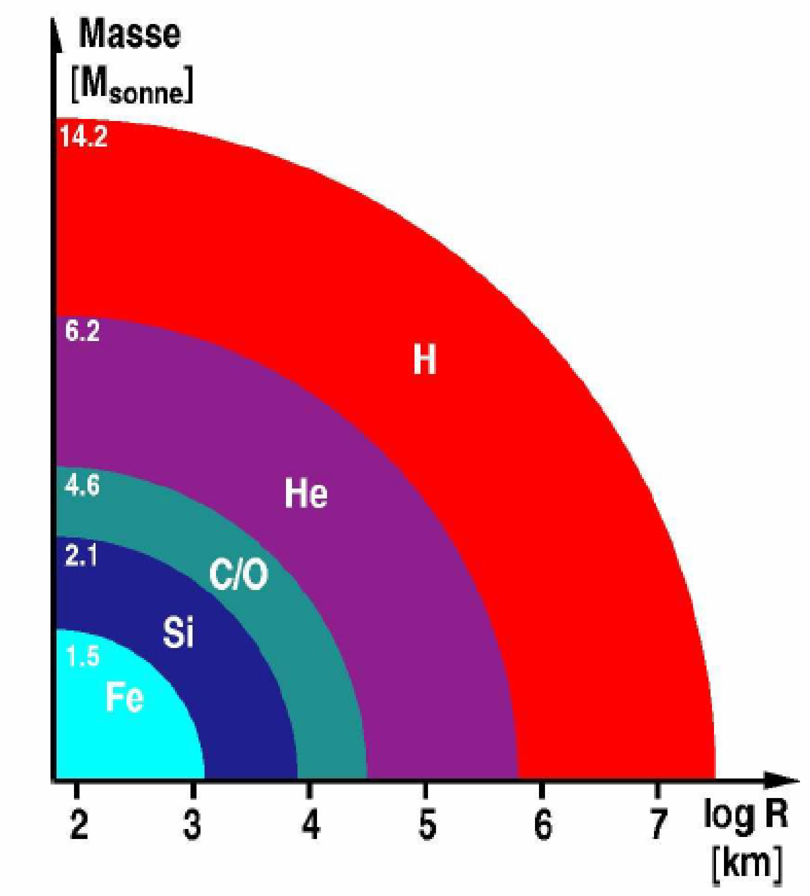
$$^{14}_{7}N + p \rightarrow {}^{15}_{8}O + \gamma + 7{,}29\ MeV$$

$$^{15}_{8}O \rightarrow {}^{15}_{7}N + e^{+} + \nu_e + 1{,}76\ MeV$$

$$^{15}_{7}N + p \rightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{4}_{2}He + 4{,}96\ MeV$$

Nachfolgende nukleare Phasen

- zunehmend kompliziertere nukleare Prozesse
- Photodesintegration beginnt
- Phasen werden nur noch von immer höheren Massen erreicht (Zündtemperatur)
- Brennende Kerne stets im Inneren des Kerns der vorangegangenen Phase
  -> Zwiebelschalenstruktur



- diese Folge endet mit Kernen in Fe Region

Zurück zu Fermigas-Modell und Neutronenstern

Sternentwicklung.
Sterne mit hinreichend großer Masse entwickeln unter der Wirkung ihrer Gravitation in ihrem Inneren so hohe Drucke, daß dort ein Plasma aus Elektronen und ionisierten Kernen bzw. Protonen entsteht.

Der Gegendruck gegen die Gravitation wird dann überwiegend von den Teilchen mit der kleinsten Masse, also von den Elektronen geliefert.

Ausgebranntes Zentrum der Sterne besteht vorwiegend aus Eisen.
Masse typischerweise von 1-2 Sonnenmassen.
durch die hohe Dichte steigt die Fermi-Energie der Elektronen

Bei weiter zunehmendem Gravitationsdruck kann nun das System ausweichen, indem es im inversen β-Zerfall: $p + e^- \rightarrow \mathrm{n} + \nu_e$ *aus je einem Elektron und einem Proton ein Neutron erzeugt und dabei seinen Gegendruck um 1/1800 erniedrigt.*
Es entsteht ein Neutronenstern.

Die Umkehrreaktion der Beta-Zerfall $\mathrm{n} \rightarrow p + e^- + \nu_{e\ \mathrm{anti}}$ *wird durch das Pauli-Prinzip für die Elektronen verboten (keine freien Elektronenniveaus wg hoher Dichte).*

Fermigas-Modell und Neutronenstern

In Kernen werden alle Protonen in Neutronen umgewandelt, Coulombbarriere verschwindet. Kerne verlieren ihre Identität. Das Innere der Sterne besteht nur noch aus Neutronen: $^{56}Fe + 26e^- \rightarrow 56n + 26\nu_e$

Die Implosion wird dann erst bei einer Dichte von 10^{18} *kg/m*^{3} *durch Fermidruck der Neutronen-Gases gestoppt.*

Wenn Masse des zentralen Kerns größer als zwei Sonnenmassen ist, dann ist Gravitation größer als Fermidruck der Neutronen $\rightarrow$ *Schwarzes Loch.*

Neutronensterne haben typischerweise Massen von 1.3 – 1.5 Sonnenmassen.

Abschätzung der Größe der Neutronensterne:

Annahmen:
- *konstante Dichte*
- *1.5 Sonnenmassen: Masse:* $M = 3 \cdot 10^{30}$ *kg   Neutronenzahl:* $N = 1.8 \cdot 10^{57}$
- *Behandle Neutronenstern als kaltes Neutronengas*

Fermigas-Modell und Neutronenstern

Fermi - Impuls des kalten Neutronengases

$$N = \frac{V(p_F)^3}{3\pi^2\hbar^3} = \frac{4\pi \cdot R^3 \cdot (p_F)^3}{3 \cdot 3\pi^2\hbar^3} \quad \Rightarrow p_F = \left(\frac{9\pi N}{4}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{R}$$

R ist Radius des Neutronensterns

mittlere kinetische Energie pro Neutron:

$$\langle E_{kin}/N \rangle = \frac{3}{5} \cdot \frac{p_F{}^2}{2M_n} = \left(\frac{9\pi N}{4}\right)^{2/3} \frac{3\hbar^2}{10M_n} \frac{1}{R^2} = \frac{C}{R^2}$$

Gravitationsenergie eines Sternes konstanter Dichte hat

mittlere potentielle Energie pro Neutron:

$$\langle E_{pot}/N \rangle = -\frac{3}{5} \cdot \frac{GNM_n{}^2}{R} = \frac{D}{R}$$

mit Gravitationskonstante G

Minimale Gesamtenergie pro Neutron:

$$\frac{d}{dR}\langle E/N \rangle = \frac{d}{dR}\left[\langle E_{kin}/N \rangle + \langle E_{pot}/N \rangle\right] = 0$$

$$\frac{d}{dR}\left[\frac{C}{R^2} + \frac{D}{R}\right] = -\frac{2C}{R^3} + \frac{D}{R^2} = 0$$

$$R = -\frac{2C}{D} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\hbar^2 (9\pi/4)^{2/3}}{GM_n{}^3 N^{1/3}}$$

Zahlen:

Radius des Neutronensternes:

~12 km !!!!

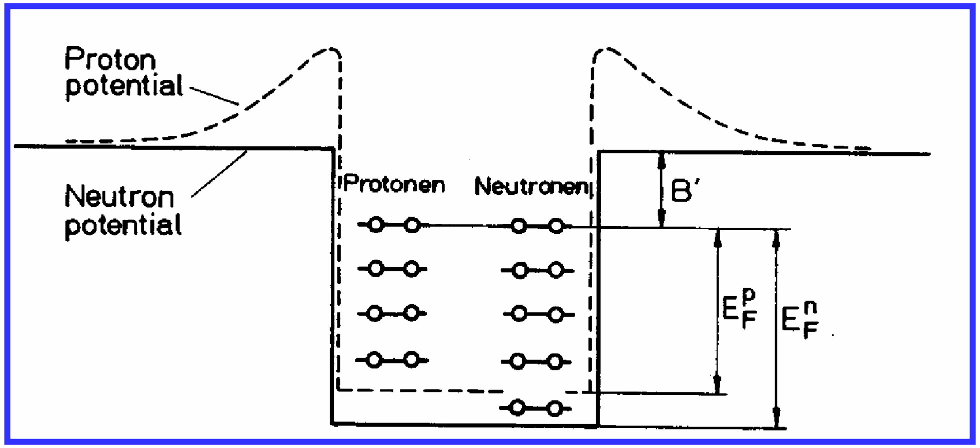
Zusammenfassung

Kerne im Grundzustand sind entartete Fermigassysteme aus Nukleonen, mit hoher Dichte (0,17 Nukleonen/fm^3).
Die Kerndichte ist bestimmt durch den "hardcore" und die Reichweite der N-N Wechselwirkung.
Im Zusammenhang mit der hohen Dichte steht ein hoher Fermi-Impuls (250 MeV/c), der Ausdruck hoher Beweglichkeit und schwacher Bindung ist.

$$\text{Fermi-Impuls:}\ p_F \cong p_F^p \cong p_F^n = \frac{\hbar}{R_0}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \approx 250\,MeV/c \qquad \text{für } Z = N = \frac{A}{2}$$

$$\text{Fermi-Energie:}\ E_F = \frac{p_F^2}{2M} \approx 33\,MeV$$

$$\text{Potentialtopf:}\ V_0 = E_F + B' \approx 40\,MeV$$



Die kinetische Energie des Nukleonengases ist wegen der geringen Bindungsenergie B′ etwa gleich der Potientialtiefe analog zum freien Elektronengas in Metall.