Grundlegende Eigenschaften der Atomkerne:

- Ladungsverteilung, Formfaktor

Zusammenfassung: Fermis Goldene Regel

Fermis Goldene Regel

Reaktionsrate:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar}\left|M_{fi}\right|^2 \rho(E')$$

Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_a}\left|M_{fi}\right|^2 \rho(E')V$$

Mit $W = \frac{\dot{N}(E')}{N_b \cdot N_a} = \frac{\sigma \cdot v_a}{V}$

V ist das Raumvolumen in dem sich die Strahlteilchen befinden.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 \cdot E'^2}{(2\pi)^2(\hbar c)^4}\left|\left\langle \Psi_f \middle| H_{int} \middle| \Psi_i \right\rangle\right|^2$$

Wechselwirkungsoperator einer Ladung e im elektrischen Potential ϕ:

$$H_{int} = e\phi \quad \Rightarrow \text{Matrixelement}: \quad \left\langle \Psi_f \middle| H_{int} \middle| \Psi_i \right\rangle = \frac{e}{V}\int e^{-i\vec{p}'\vec{x}/\hbar}\phi(x)e^{+i\vec{p}\vec{x}/\hbar}d^3x$$

Zusammenfassung: Elektronenstreuung

Impulsübertrag: $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$ $\qquad \langle \Psi_f | H_{\text{int}} | \Psi_i \rangle = \frac{e}{V} \int \phi(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x$

Greensche Theorem für zwei Skalarfelder u und v: $\int (u\Delta v - v\Delta u) d^3x = 0$

$$\langle \Psi_f | H_{\text{int}} | \Psi_i \rangle = -\frac{e\hbar^2}{V|\vec{q}|^2} \int \Delta\phi(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x$$

Poisson-Gleichung: $\Delta\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$

Ladungsdichte: $\rho(\vec{x}) = Ze\,\mathrm{f}(\vec{x})$ $\qquad$ Ladungsverteilung: $\mathrm{f}(\vec{x})$

Matrixelement als Funktion der Ladungsverteilung $\mathrm{f}(\vec{x})$:

$$\langle \Psi_f | H_{\text{int}} | \Psi_i \rangle = \frac{e\hbar^2}{\varepsilon_0 V|\vec{q}|^2} \int \rho(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x = \frac{Z \cdot 4\pi\alpha\hbar^3 c}{|\vec{q}|^2 \cdot V} \int \mathrm{f}(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x$$

Fouriertransformierte der Ladungsfunktion

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar}\, \mathrm{f}(\vec{x}) d^3x$$

Elektronenstreuung an ausgedehnter Ladungsverteilung

Anwendung der Ergebnisse auf Rutherford - Streuung

Die Ladungsfunktion ist eine δ - Funktion, der Formfaktor ist konstant eins.

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} = \frac{4Z^2 \cdot \alpha^2 (\hbar c)^2 E'^2}{|\vec{q}c|^4}}$$

Beachte $1/\vec{q}^{\,4}$ Abhängigkeit des elektromagnetischen Streuquerschnittes, dies erschwert Messungen von Ereignissen mit großen Impulsüberträgen

Elastische Streuung ohne Rückstoß :

$E = E'$ $\quad |\vec{p}| = |\vec{p}'|$ $\quad$ Impulsübertrag : $|\vec{q}| = 2|\vec{p}|\sin\frac{\theta}{2}$ $\quad E = |\vec{p}|c$

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} = \frac{Z^2 \cdot \alpha^2 (\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4 \theta/2}}$$

Mott-Streuung und Formfaktor

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{exp.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{*}_{Mott} \cdot \left|F\left(q^2\right)\right|^2$$

Wirkungsquerschnitt an einem punktförmigen Teilchen ist bei Elektron-Streuung der Mott-Wirkungsquerschnitt.

$F(\boldsymbol{q}^2)$ ist der *Formfaktor*, er beschreibt die Form des zusammengesetzen Objekts. Der Wirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels, d.h. als Funktion des Impulsübertrags *q* wird *ge*messen, daraus erhält man die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung.

Für kugelförmige Kerne hängt der Formfaktor nur vom Absolutbetrag des Impuls-übertrags ab. Deshalb die Funktion $F(\boldsymbol{q}^2)$.

Integration über die Winkel

Mott-Streuung und Formfaktor

Nebenrechnung:

$$\int e^{i\vec{q}\vec{x}}\, \mathrm{f}(\vec{x}) d^3x = 2\pi \int_0^\infty dr r^2 f(r) \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) e^{iqr\cos\theta}$$

mit $$\int_{-1}^{1} d(\cos\theta) e^{iqr\cos\theta} = \left[\frac{1}{iqr} e^{iqr\cos\theta}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{iqr}\left(e^{iqr} - e^{-iqr}\right) = \frac{2}{qr}\sin qr$$

Nach der Integration über die Winkel ergibt sich der ***Formfaktor***:

$$F(q^2) = \frac{4\pi}{Z}\int_0^\infty r^2 dr\, \frac{\sin qr}{qr} \rho_c(r)$$

bzw. die Umkehrung dazu ergibt die ***Ladungsdichte***:

$$\rho_c(r) = \frac{Z}{(2\pi)^3}\int d^3q F(q^2) e^{i\vec{q}\vec{r}}$$

Formfaktor und Ladungsdichte

Zusammenhang zwischen radialer Ladungsverteilung und Formfaktor

Ladungsdichte:

$$\rho_c(r) = \frac{Z}{(2\pi)^3} \int d^3q F(q^2) e^{i\vec{q}\vec{r}}$$

Formfaktor:

$$F(q^2) = \frac{4\pi}{Z} \int_0^\infty r^2 dr \, \frac{\sin qr}{qr} \rho_c(r)$$

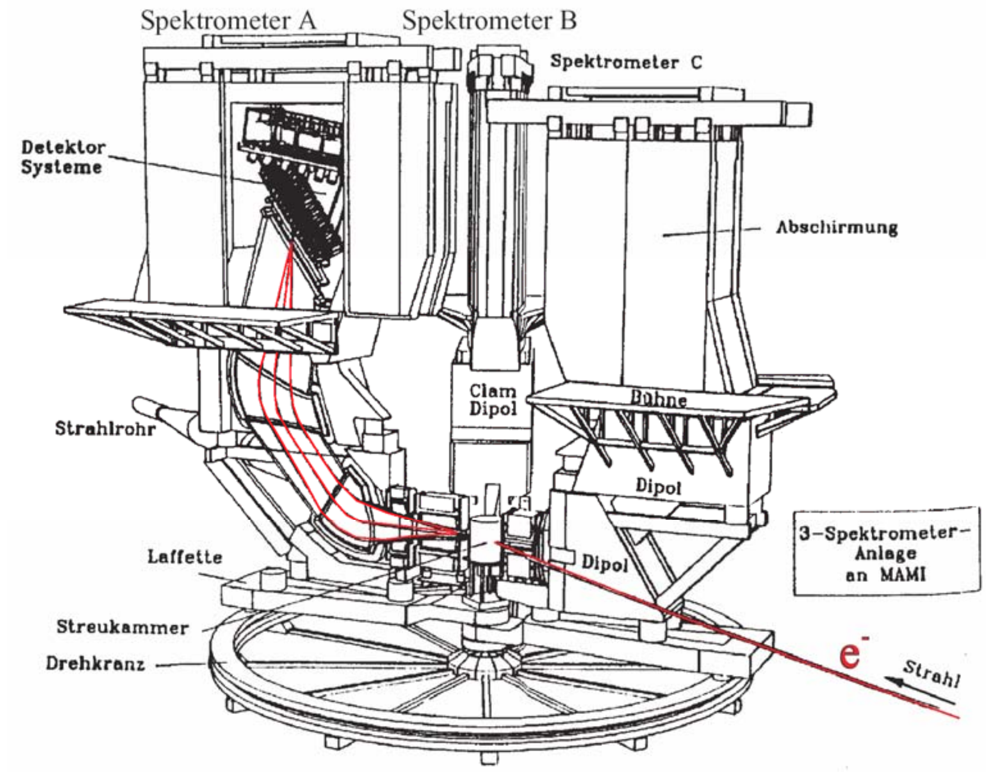
Ladungsdichte		Formfaktor	
$\delta(r)$	Punktladung	1	
$\frac{a^3}{8\pi} e^{-ar}$	exponentiell	$\frac{1}{1+q^2/a^2}$	Dipol
$\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{2/3} e^{-a^2r^2/2} e^{-q^2/a^2}$	Gauss	e^{-q^2/a^2}	Gauss
$\frac{3}{4\pi R^3}$ für $< R$, 0 für $> R$	homogene Kugel	$\frac{3}{(qR)^3}(\sin qR - qR\cos qR)$	

Formfaktor und Ladungsdichte

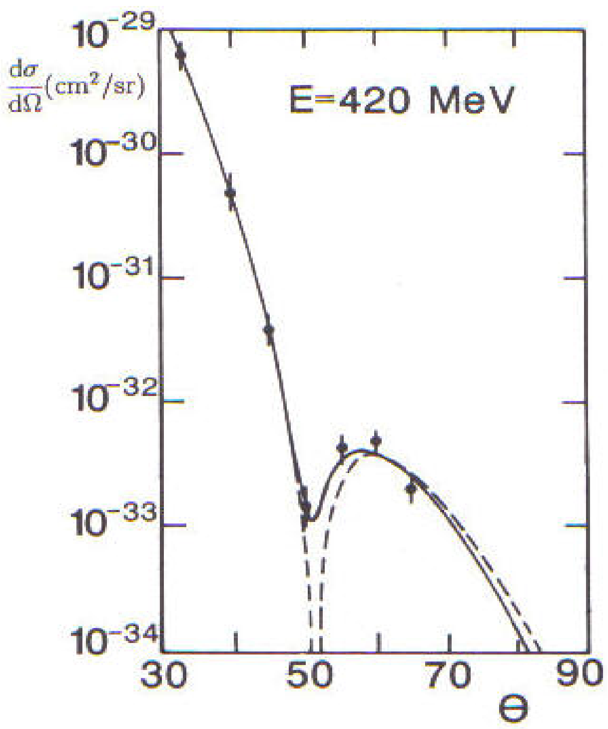
$\rho_c(r)$	$\lvert F(q^2) \rvert$	Beispiel
punktförmig	konstant	Elektron
exponentiell	Dipol	Proton
gaußförmig	gaußförmig	^{6}Li
homogene Kugel	oszillierend	—
Kugel mit diffusem Rand	oszillierend	^{40}Ca
$r \longrightarrow$	$\lvert q \rvert \longrightarrow$	

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{Mott} \cdot \left|F(q^2)\right|^2$$

Bei festem E ist q von θ abhängig, daraus wird Formfaktor bestimmt.



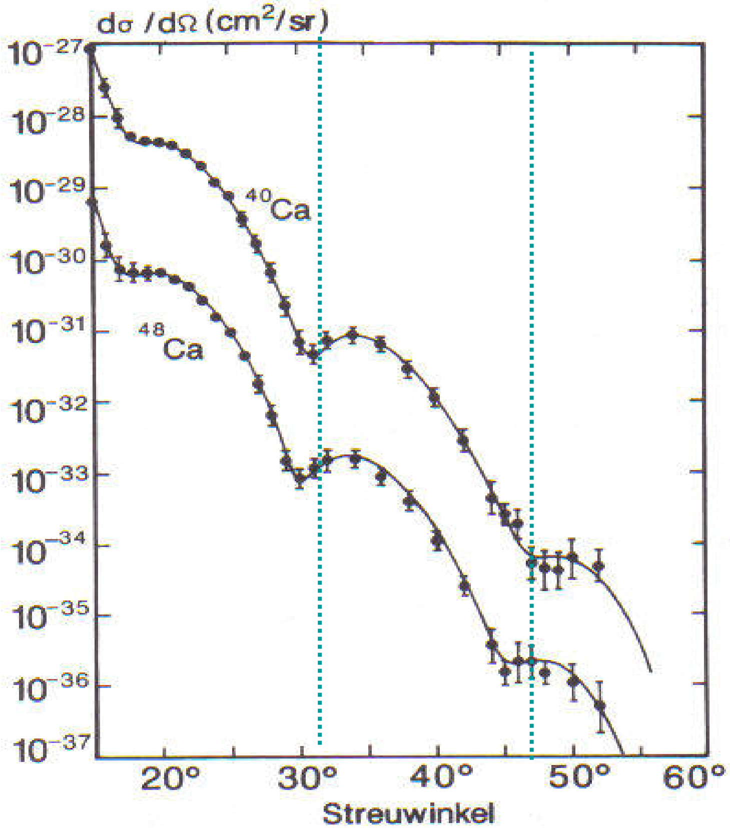
Wirkungsquerschnitte und Formfaktoren



Differentieller WQ für Elektronenstreuung an ^{12}C

- Messung des Formfaktors von ^{12}C
- Streuung an homogener Kugel: Interferenzminima
- Gestrichelte Kurve: Minimum bei $|\boldsymbol{q}| = 1.8$ fm^{-1}.
- Vergleich mit Nullstelle im Wirkungsquerschnitt der homogenen Kugel bei $qR = 4.5$ -> Kernradius R~2.5 fm.

Differentielle WQ an den Kalziumisotopen ^{40}Ca und ^{48}Ca. Zur besseren Darstellung wurden WQ mit einen Faktor 10 bzw. 10^{-1} multipliziert.
Aus der Lage der Minima erkennt man, dass der Radius von ^{48}Ca größer ist als von ^{40}Ca.



Parametrisierung der Ladungsverteilungen

Dichteverteilung kann durch eine Fermi-Funktion dargestellt werden:

$$\rho_c(r) = \frac{\rho_0}{1+\exp((r-c)/a)}$$

für größere Kerne gilt:

$$c \approx 1.07 \cdot A^{1/3}\, fm\ ,\quad a \approx 0.54\ fm$$

Mittlerer quadratischer Radius:

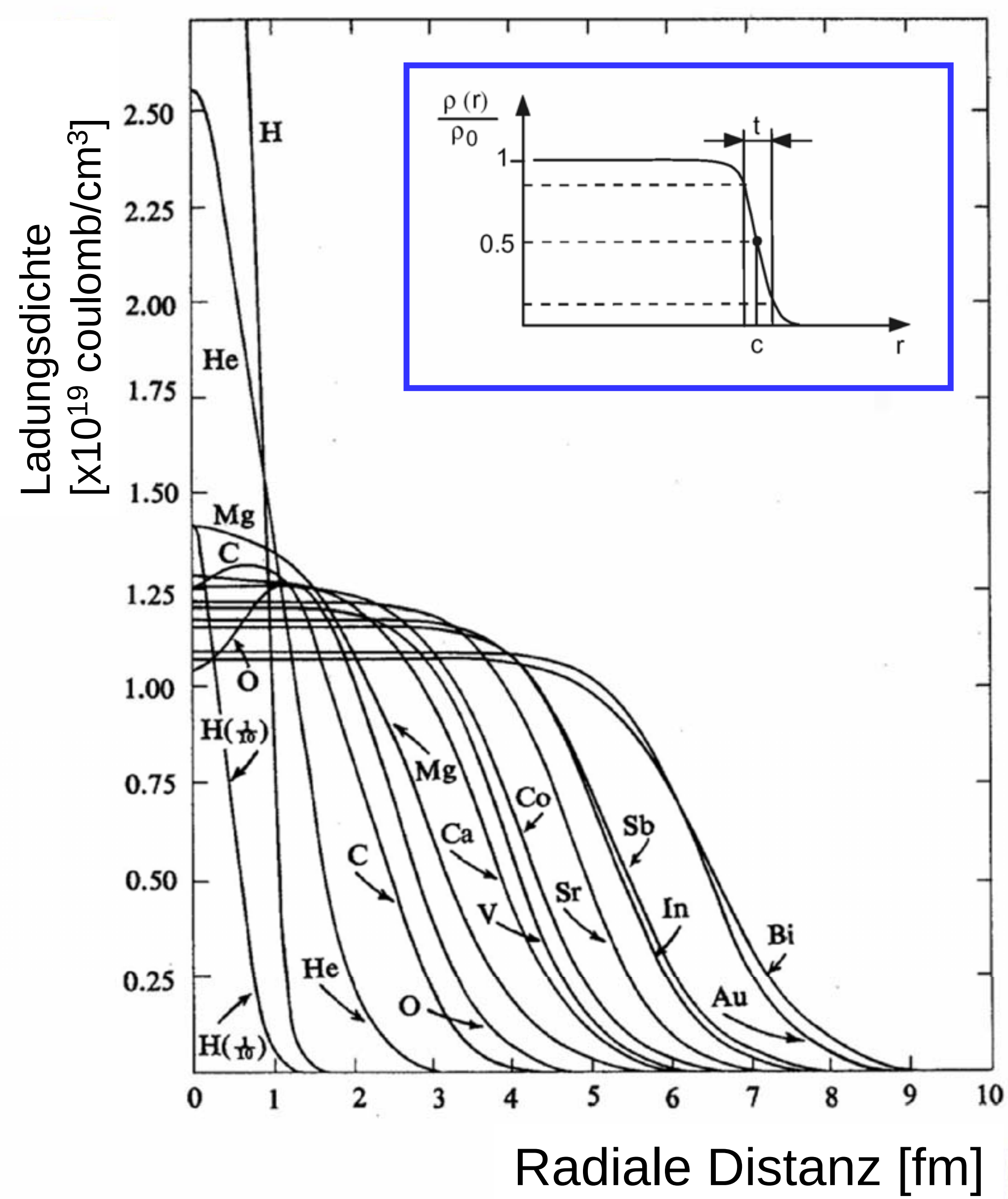
$$r_{rms} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = r_0 \cdot A^{1/3} \quad \text{mit } r_0 = 0.94\, fm$$

Äquivalent Radius R einer Kugel:

$$R^2 = 5/3 \langle r^2 \rangle \Rightarrow R = 1.21 \cdot A^{1/3}$$

Hautdicke t:

$$t = r\left(\rho/\rho_0 = 0.1\right) - r\left(\rho/\rho_0 = 0.9\right)$$
$$= 2a \ln 9 \approx 2,4\ fm$$



Zusammenfassung: Formfaktor, Wirkungsquerschnitte

$F(\vec{q})$ ist der Formfaktor; er enthält die Informationen über die räumliche Verteilung der Ladung im Kern.

Wirkungsquerschnitt für Elektronenstreuung am Kern

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2 4\pi \left|\vec{p}'\right|^2 d\left|\vec{p}'\right|}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} \left|\left\langle \Psi_f \left| H_{\mathrm{int}} \right| \Psi_i \right\rangle\right|^2 = \frac{4Z^2\alpha^2 (\hbar c)^2 E'^2}{\left|\vec{q}c\right|^4} \left|F(\vec{q})\right|^2$$

Rutherford - Streuung Wirkungsquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} = \frac{4Z^2 \cdot \alpha^2 (\hbar c)^2 E'^2}{\left|\vec{q}c\right|^4} \qquad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} = \frac{Z^2 \cdot \alpha^2 (\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4 \theta/2}$$

Mott - Wirkungsquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2\right) \qquad \text{mit } \beta = \frac{v}{c}$$